4 Derivationen, Differentiale, Lie-Algebren 57

Wir beschäftigen uns zunächst mit den Tangentialräumen an algebraische Varietäten und damit zusammenhängenden Gegenständen. Im zweiten Teil des Kapitels werden die Lie-Algebren von linearen algebraischen Gruppen eingeführt und deren grundlegende Eigenschaften bewiesen.

Lineare algebraische Gruppen

Vorlesungsreihe vom Herbstsemester 2020 - Sommersemester 2021
Fakultät für Mathematik, Universität Leipzig
frei nach
T.A.Springer: Linear algebraic groups
Birkhäuser, Boston 1981
(zweite Auflage 1998)

Ort der Vorlesung: Seminargebäude, Raum 2-14
Zeit der Vorlesung: 13.15-14.45 Uhr Freitags

4.1 Derivationen und Tangentialräume 57

Wir erinnern zunächst an den Begriff der Derivation.

4.1.1 Derivationen 57

4.1.1A Definition 57

Seien R ein kommutativer Ring, A eine R-Algebra und M ein (linker) A-Modul. Eine R-<u>Derivation</u> von A mit Werten in M ist eine R-lineare Abbildung

$$D: A \longrightarrow M$$

mit

$$D(a \cdot b) = a \cdot Db + b \cdot Da$$

für a, b ∈ A. Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{Der}_R(A,M)$$

die Menge der R-Derivationen von A mit Werten in R. Im Fall M = A schreiben wir auch

$$\mathrm{Der}_R(A) := \mathrm{Der}_R(A,A).$$

Die Elemente dieser Mengen heißen R-Derivationen der R-Algebra A.

Bemerkungen

(i) Es gilt

$$D(r \cdot 1_A) = 0 \text{ für jedes } r \in R.$$

(ii) $\mathrm{Der}_R(A,M)$ ist ein (linker) R-Modul bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von Abbildungen mit Werten in einem R-Modul, d.h.

$$(D' + D'')(a) := D'(a) + D''(a)$$

und

$$(r \cdot D)(a) := (r \cdot 1_A) \cdot D(a)$$

für D', D'' ∈ $\mathrm{Der}_R(A,M)$, a ∈ A und r ∈ R. Genauer, mit diesen Operationen ist $\mathrm{Der}_R(A,M)$ ein Teilmodul des R-Moduls $\mathrm{Hom}_R(A, M)$.

(iii) Für jeden Homomorphismus $\phi: A \longrightarrow B$ von R-Algebren und jeden B-Modul N ist

$$\phi_0\colon \operatorname{Der}_R(B, N) \longrightarrow \operatorname{Der}_R(A, N),\ D \mapsto D\circ\phi,$$

ein wohldefinierter Homomorphismus von A-Moduln. Dabei sei N mit der durch ϕ definierten A-Modul-Struktur versehen, d.h. es sei

$$a\bullet n := \phi(a)\bullet n \text{ für } a\in A \text{ und } n \in N.$$

(iv) Mit den Bezeichnungen von (iii) ist die folgende Sequenz von A-Moduln exakt.

$$0 \longrightarrow \operatorname{Der}_A(B, N) \xrightarrow{i} \operatorname{Der}_R(B, N) \xrightarrow{\phi_0} \operatorname{Der}_R(A, N)$$

Dabei soll i die natürliche Einbettung bezeichnen.

(v) Seien R ein kommutativer Ring mit 1, A eine R-Algebra, $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge,

$$\phi{:}A \longrightarrow S^{-1}A,\ a \mapsto \frac{as}{s}$$

die natürliche Abbildung in den Quotientenring und N ein Modul über $S^{-1}A$. Wir versehen N mit der durch ϕ definierten A-Modulstruktur. Dann ist die Abbildung

$$\phi_0\colon \operatorname{Der}_R(S^{-1}A, N) \longrightarrow \operatorname{Der}_R(A, N),\ D \mapsto D\circ\phi,$$

von Bemerkung (iii) ein Isomorphismus von A-Moduln. Außerdem gilt

$$\operatorname{Der}_A(S^{-1}A, N) = 0.$$

Beweis. Zu (i). Weil D eine Derivation ist, gilt

$$D(r\bullet 1_A) = D(r\bullet 1_A\bullet 1_A) = r\bullet 1_A\bullet D(1_A) + 1_A\bullet D(r\bullet 1_A)$$

und weil D eine R-lineare Abbilung ist, muß

$$D(r\bullet 1_A) = r\bullet D(1_A) = r\bullet 1_A\bullet D(1_A)$$

gelten. Zusammen ergibt sich

$$0 = 1_A\bullet D(r\bullet 1_A) = D(r\bullet 1_A).$$

Zu (ii). Wir haben zu zeigen, daß die beschriebenen Operationen, die Die Teilmenge $\operatorname{Der}_R(A,M)$
von $\operatorname{Hom}_R(A, M)$ in sich überführen.

Die Summe zweier R-linearer Abbildungen ist R-linear. Für

$$D', D'' \in \operatorname{Der}_R(A,M)$$

und $a,b \in A$ ist

$$\begin{aligned}(D'+D'')(a\bullet b) &= D'(a\bullet b) + D''(a\bullet b)\\ &= a\bullet D'b + b\bullet D''a + a\bullet D''b + b\bullet D''a\\ &= a\bullet(D'b + D''b) + b\bullet(D'a + D''a)\\ &= a\bullet(D'+D'')b + b\bullet(D'+D'')a,\end{aligned}$$

d.h. $D'+D'' \in \operatorname{Der}_R(A,M)$.

Für jedes $r \in R$ ist das r-fache einer R-linearen Abbildung eine R-lineare Abbildung.

Weiter gilt für $r\in R$, $D \in \operatorname{Der}_R(A,M)$ und $a, b \in A$

$$\begin{aligned}(r\bullet D)(a\bullet b) &= (r\bullet 1_A)\bullet D(a\bullet b)\\ &= (r\bullet 1_A)\bullet a\bullet Db + (r\bullet 1_A)\bullet b\bullet D(a)\\ &= a\bullet(r\bullet 1_A)\bullet Db + b\bullet(r\bullet 1_A)\bullet D(a)\\ &= a\bullet(r\bullet D)(b) + b\bullet(r\bullet D)(a),\end{aligned}$$

d.h. $r\bullet D \in \mathrm{Der}_R(A,M)$.

<u>Zu (iii)</u>. Weil $D \in \mathrm{Der}_R(B, N)$ eine R-lineare Abbildung ist und ϕ ein R-Algebra-Homomorphismus (also ebenfalls eine R-lineare Abildung), ist auch $D\circ\phi$ eine R-lineare Abiblung. Für $a,b \in A$ gilt

$$
\begin{aligned}
(D\circ\phi)(a\bullet b) &= D(\phi(a)\bullet\phi(b)) && (\phi \text{ ist ein Ring-Homomorphismus})\\
&= \phi(a)\bullet D(\phi(b)) + \phi(b)\bullet D(\phi(a)) && (D \text{ ist eine Derivation})\\
&= a\bullet(D\circ\phi)b + b\bullet(D\circ\phi)a && (\text{nach Definition der A-Multiplikation von N})
\end{aligned}
$$

Wir haben gezeigt, $D\circ\phi \in \mathrm{Der}_R(A, N)$, d.h. ϕ_0 ist eine wohldefinierte Abbildung.

Für $D', D'' \in \mathrm{Der}_R(B, N)$ und $a \in A$ gilt

$$
\begin{aligned}
\phi_0(D'+D'')(a) &= (D'+D'')(\phi(a))\\
&= D'(\phi(a)) + D''(\phi(a))\\
&= \phi_0(D')(a) + \phi_0(D'')(a),
\end{aligned}
$$

also

$$\phi_0(D'+D'') = \phi_0(D') + \phi_0(D'').$$

Weiter gilt für $D \in \mathrm{Der}_R(B, N)$ und $a, b \in A$

$$
\begin{aligned}
\phi_0(a\bullet D)(b) &= (a\bullet D)(\phi(b))\\
&= a\bullet(D(\phi(b)))\\
&= a\bullet (\phi_0(D)(b))\\
&= (a\bullet \phi_0(D))(b)
\end{aligned}
$$

also

$$\phi_0(a\bullet D) = a\bullet \phi_0(D).$$

Wir haben gezeigt ϕ_0 ist A-linear, d.h. ein Homomorphismus von A-Moduln.

<u>Zu (iv)</u>. Weil jede A-lineare Abbildung $B \longrightarrow N$ erst recht R-linear ist, ist $\mathrm{Der}_A(B, N)$ eine Teilmenge von $\mathrm{Der}_R(B, N)$, d.h. die Abbildung i ist wohldefiniert (und als identische Abbildung mit Werten im A-Modul N auch A-linear. Wir haben noch zu zeigen, die Sequenz ist exakt.

<u>Exaktheit an der Stelle</u> $\mathrm{Der}_A(B, N)$.

Als identische Abbildung ist i injektiv.

<u>Exaktheit an der Stelle</u> $\mathrm{Der}_R(B, N)$.

Für $D \in \mathrm{Der}_A(B, N)$ ist $i(D)$ eine A-lineare R-Derivation. Damit gilt für $a \in A$,

$$
\begin{aligned}
\phi_0(i(D))(a) &= i(D)(\phi(a)) && (\text{nach Definition von } \phi_0)\\
&= i(D)(\phi(a\bullet 1_A))\\
&= a\bullet i(D)(\phi(1_A)) && (i(D) \text{ ist A-linear})\\
&= a\bullet i(D)(1_B) && (\phi \text{ ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1})
\end{aligned}
$$

$= a \cdot D(1_R \cdot 1_B)$
$= a \cdot 0$ (nach Bemerkung (i))
$= 0.$

Wir haben gezeigt,

$$\mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Ker}(\phi_0).$$

Wir haben noch die umkehrte Inklusion zu beweisen. Sei

$$D \in \mathrm{Ker}(\phi_0),$$

d.h. es gilt $D \in \mathrm{Der}_R(B, N)$ und $D(\phi(a)) = 0$ für jedes $a \in A$. Für $a \in A$ und $b \in B$ ist dann

$D(a \cdot b) = D(\phi(a) \cdot b)$ (nach Definition der A-Modul-Struktur von N)
$= \phi(a) \cdot D(b) + b \cdot D(\phi(a))$
$= \phi(a) \cdot D(b)$ (wegen $D(\phi(a)) = 0$)
$= a \cdot D(b)$ (nach Definition der A-Modul-Struktur von N).

Wir haben gezeigt, die R-Derivation $D: B \longrightarrow N$ ist A-linear, also eine A-Derivation. Sie liegt also im Bild von i,

$$D \in \mathrm{Im}(i).$$

Zu (v). 1. Schritt. $\mathrm{Der}_A(S^{-1}A, N) = 0$.

Sei $D \in \mathrm{Der}_A(S^{-1}A, N)$. Für jedes Element von $f \in S^{-1}A$ gibt es Elemente $a \in A$ und $s \in S$ mit $f \cdot \phi(s) = \phi(a)$. Es gilt

$0 = D(\phi(a))$ (D ist eine A-Derivation)
$= f \cdot D(\phi(s)) + \phi(s) \cdot D(f)$ (D ist eine Derivation)
$= f \cdot 0 + \phi(s) \cdot D(f)$ (D ist eine A-Derivation)
$= \phi(s) \cdot D(f).$

Weil $\phi(s)$ eine Einheit von $S^{-1}A$ ist und N ein $S^{-1}A$-Modul, können wir mit dem Inversen von $\phi(s)$ multiplizieren und erhalten

$0 = D(f).$

Wir haben gezeigt, $\mathrm{Der}_A(S^{-1}A, N) = 0$.

2. Schritt. ϕ_0 ist injektiv.

Auf Grund der zu $\phi: A \longrightarrow S^{-1}A$ gehörigen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(S^{-1}A, N) \xrightarrow{i} \mathrm{Der}_R(S^{-1}A, N) \xrightarrow{\phi_0} \mathrm{Der}_R(A, N).$$

von Bemerkung (iv) ist die Injektivität von ϕ_0 eine Konsequenz des ersten Schritts.

3. Schritt. ϕ_0 ist surjektiv.

Sei $D \in \mathrm{Der}_R(A, N)$. Wir haben zu zeigen, daß es ein

$$\tilde{D} \in \mathrm{Der}_R(S^{-1}A, N)$$

gibt mit

$$D = \tilde{D} \circ \phi.$$

Jedes Element von $S^{-1}A$ hat die Gestalt $\frac{a}{s}$ mit $a \in A$ und $s \in S$. Wir setzen

$$\widetilde{D}(\frac{a}{s}) := \frac{1}{s^2} \bullet (s \bullet D(a) - a \bullet D(s))$$

<u>Die Definition von</u> $\widetilde{D}$ <u>ist korrekt</u>: Sind $a' \in A$ und $s' \in S$ Elemente mit

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$$

so gibt es ein $t \in S$ mit

$$t \bullet (a \bullet s' - a' \bullet s) = 0, \qquad (1)$$

also

$$\begin{aligned}
0 &= D(t \bullet (a \bullet s' - a' \bullet s)) \\
&= D(t \bullet a \bullet s') - D(t \bullet a' \bullet s) \quad \text{(D ist R-linear)} \\
&= a \bullet s' \bullet D(t) + t \bullet s' \bullet D(a) + t \bullet a \bullet D(s') \\
&\qquad - a' \bullet s \bullet D(t) - t \bullet s \bullet D(a') - t \bullet a' \bullet D(s) \\
&= a \bullet s' \bullet D(t) + t \bullet s' \bullet D(a) + t \bullet a \bullet D(s') \\
&\qquad - a' \bullet s \bullet D(t) - t \bullet s \bullet D(a') - t \bullet a' \bullet D(s)
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren mit $s \bullet s'$ und erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= a \bullet s \bullet s'^2 \bullet D(t) + t \bullet s \bullet s'^2 \bullet D(a) + t \bullet a \bullet s \bullet s' \bullet D(s') \\
&\qquad - a' \bullet s^2 \bullet s' \bullet D(t) - t \bullet s^2 \bullet s' \bullet D(a') - s \bullet s' t \bullet a' \bullet D(s) \\
&= a \bullet s \bullet s'^2 \bullet D(t) + t \bullet a \bullet s \bullet s' \bullet D(s') \\
&\qquad - a' \bullet s^2 \bullet s' \bullet D(t) - s \bullet s' t \bullet a' \bullet D(s) \\
&\qquad + t \bullet s'^2 \bullet (s \bullet D(a) - a \bullet D(s)) \\
&\qquad - t \bullet s^2 \bullet (s' \bullet D(a') - a' \bullet D(s')) \\
&\qquad + a \bullet t \bullet s'^2 \bullet D(s) - a' \bullet t \bullet s^2 \bullet D(s') \\
&= s \bullet s' \bullet (a \bullet s' - a' \bullet s) \bullet D(t) + t \bullet s' \bullet (a \bullet s' - a' \bullet s) \bullet D(s') \\
&\qquad - s' \bullet t \bullet (s \bullet a' - a \bullet s') \bullet D(s) \\
&\qquad + t \bullet s'^2 \bullet (s \bullet D(a) - a \bullet D(s)) \\
&\qquad - t \bullet s^2 \bullet (s' \bullet D(a') - a' \bullet D(s'))
\end{aligned}$$

Wegen (1) ist der zweite und der dritte Summand gleich Null. Ebenfalls wegen (1) wird der erste Summand gleich Null, wir mit t multiplizieren. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= t^2 \bullet s'^2 \bullet (s \bullet D(a) - a \bullet D(s)) - t^2 \bullet s^2 \bullet (s' \bullet D(a') - a' \bullet D(s')) \\
&= t^2 \bullet (s'^2 \bullet (s \bullet D(a) - a \bullet D(s)) - s^2 \bullet (s' \bullet D(a') - a' \bullet D(s')))
\end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{s^2} \bullet (s \bullet D(a) - a \bullet D(s)) = \frac{1}{s'^2} \bullet (s' \bullet D(a') - a' \bullet D(s')).$$

Die Definition von $\widetilde{D}$ ist tatsächlich korrekt.

$\widetilde{D}$ <u>ist eine</u> R-<u>Derivation von</u> $S^{-1}A$ <u>mit Werten in</u> N: $\widetilde{D}$ ist eine R-linearre Abbildung, weil D eine R-lineare Abbildung ist. Wir haben noch zu zeigen, daß die Produkt-Regel

für $\widetilde{D}$ gilt. Für $a, b \in A$ und $s,t \in S$ gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}(\frac{a}{s} \bullet \frac{b}{t}) &= \widetilde{D}(\frac{ab}{st}) \\
&= \frac{1}{(st)^2} \bullet (st \bullet D(ab) - ab \bullet D(st)) \qquad \text{(nach Defintion von } \widetilde{D}\text{)}
\end{aligned}$$

$= \frac{1}{(st)^2} \bullet (ast \bullet Db + bst \bullet Da - abs \bullet Dt - abt \bullet Ds)$ (D ist eine Derivation)

$= \frac{1}{(st)^2} \bullet (as \bullet (t \bullet Db - b \bullet Dt) + bt \bullet (s \bullet Da - a \bullet Ds))$

$= \frac{1}{s^2} \bullet as \bullet \widetilde{D}(\frac{b}{t}) + \frac{1}{t^2} \bullet bt \bullet \widetilde{D}(\frac{a}{s})$

$= \frac{a}{s} \bullet \widetilde{D}(\frac{b}{t}) + \frac{b}{t} \bullet \widetilde{D}(\frac{a}{s})$

Wir haben gezeigt, daß $\widetilde{D} \in Der_R (S^{-1}A, N)$ gilt.

Es gilt $\phi_0(\widetilde{D}) = D$.

Nach Definition gilt für $a \in A$:

$\phi_0(\widetilde{D})(a) = \widetilde{D}(\phi(a))$

$= \widetilde{D}(\frac{as}{s})$ (nach Definition von ϕ)

$= \frac{1}{s^2} \bullet (s \bullet D(as) - as \bullet D(s))$ (nach Defintion von $\widetilde{D}$)

$= \frac{1}{s^2} \bullet (s^2 \bullet D(a) + as \bullet D(s) - as \bullet D(s)$ (D ist ein Derivatin)

$= \frac{1}{s^2} \bullet s^2 \bullet D(a)$

$= \frac{s^2}{s^2} \bullet D(a)$

$= D(a)$ ($\frac{s^2}{s^2}$ ist das Einelement von $S^{-1}A$)

Da dies für alle $a \in A$ gilt, folgt $\phi_0(\widetilde{D}) = D$.

QED.

4.1.1 B Beispiel 1

Für jeden kommutativen Ring R mit 1 jeden Polynomring

$$A = R[T] = R[T_1,...,T_n]$$

ist die partielle Ableitung nach T_i,

$$\frac{\partial}{\partial T_i}(\sum_{j=0}^{N} f_j \bullet T_i^j) := \sum_{j=0}^{N} j \bullet f_j \bullet T_i^{j-1} \text{ für } f_j \in k[T_1,...,T_{i-1},T_{i+1},...,T_n],$$

eine R-Derivation von A,

$$\frac{\partial}{\partial T_i} \in Der_R(A).$$

Beweis. Nach Definition ist $\frac{\partial}{\partial T_i}$ eine R-lineare Abbildung. Die Abbildung ist sogar linear über

$$k[T_1,...,T_{i-1},T_{i+1},...,T_n]. \quad (1)$$

Wir haben zu zeigen,

$$\frac{\partial}{\partial T_i}(f \bullet g) = f \bullet \frac{\partial}{\partial T_i}(g) + g \bullet \frac{\partial}{\partial T_i}(f). \qquad (2)$$

Beide Seiten von (2) sind in f linear über (1). Wir können also annehmen

$$f = T_i^{\alpha}.$$

Analog sind beide Seiten von (2) linear in g über (1). Wir können also annehmen

$$f = T_i^{\beta}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial T_i}(f \bullet g) &= \frac{\partial}{\partial T_i}(T_i^{\alpha+\beta}) \\
&= (\alpha+\beta) \bullet T_i^{\alpha+\beta-1} \\
&= \alpha \bullet T_i^{\alpha-1} \bullet T_i^{\beta} + \beta \bullet T_i^{\beta-1} \bullet T_i^{\alpha} \\
&= T_i^{\beta} \bullet \frac{\partial}{\partial T_i}(T_i^{\alpha}) + T_i^{\alpha} \bullet \frac{\partial}{\partial T_i}(T_i^{\beta}) \\
&= f \bullet \frac{\partial}{\partial T_i}(g) + g \bullet \frac{\partial}{\partial T_i}(f).
\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, $\frac{\partial}{\partial T_i}$ ist eine R-Derivation von A.

QED.

4.1.1 C Beispiel 2

Seien R ein kommutativer Ring mit 1,

$$A = R[T] = R[T_1,...,T_n]$$

ein Polynomring in n Unbestimmten,

$$\rho: A \longrightarrow R$$

ein R-Algebra-Homomorphismus,

$$M$$

ein R-Modul und

$$m_1,..., m_n \in M.$$

Wir versehen M mit Hilfe von ρ mit einer A-Modul-Struktur,

$$a \bullet m := \rho(a) \bullet m \text{ für } a \in A \text{ und } m \in M.$$

Dann ist durch

$$D(f) := \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{\partial f}{\partial T_i}\right) \bullet m_i \qquad (1)$$

eine R-Derivation von A mit Werten in M definiert,

$$D \in \mathrm{Der}_R(A, M).$$

Umgekehrt hat jede R-Deriviation von A mit Werten in M diese Gestalt.

Beweis. 1. Schritt. Durch (1) ist eine R-Derivation von A mit Werten in M definiert.

Weil ρ ein R-Algebra-Homomorphismus, also insbesondere R-linear ist, ist

$$D: A \longrightarrow M$$

eine R-lineare Abbildung. Für f, g ∈ A gilt

$$
\begin{aligned}
D(f\bullet g) &= \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{\partial(f\bullet g)}{\partial T_i}\right)\bullet m_i && \text{(nach Definition von D)}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\rho\left(f\bullet\frac{\partial g}{\partial T_i} + g\bullet\frac{\partial g}{\partial T_i}\right)\right)\bullet m_i && \left(\frac{\partial}{\partial T_i}\text{ ist eine R-Derivation}\right)\\
&= \rho(f)\bullet \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{\partial g}{\partial T_i}\right)\bullet m_i + \rho(g)\bullet \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{\partial g}{\partial T_i}\right)\bullet m_i\\
&= \rho(f)\bullet D(g) + \rho(g)\bullet D(f),
\end{aligned}
$$

d.h. D ist eine Derivation.

2. <u>Schritt</u>. Jede R-Derivation von A mit Werten in M hat die Gestalt (1).

Sei D eine R-Derivation von A mit Werten in M. Wir setzen

$$m_i := D(T_i)$$

und

$$\widetilde{D}(f) := \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{\partial f}{\partial T_i}\right)\bullet m_i.$$

Dann gilt für $\ell = 0, 1, 2, \ldots$

$$\widetilde{D}(T_i^{\ell}) = D(T_i^{\ell}). \qquad (2)$$

Für $\ell = 0$ steht auf beiden Seiten 0 (weil D eine R-Derivation ist) und für $\ell = 1$ steht auf beiden Seiten m_i. Der allgemeine Fall folgt induktiv:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D}(T_i^{\ell}) &= \widetilde{D}(T_i\bullet T_i^{\ell-1})\\
&= \rho(T_i)\bullet\widetilde{D}(T_i^{\ell-1}) + \rho(T_i^{\ell-1})\bullet\widetilde{D}(T_i) && (\widetilde{D}\text{ ist eine Derivation})\\
&= \rho(T_i)\bullet D(T_i^{\ell-1}) + \rho(T_i^{\ell-1})\bullet D(T_i) && \text{(Induktionsvoraussetzung)}\\
&= D(T_i^{\ell}) && \text{(D ist ein Derivation)}
\end{aligned}
$$

Damit gilt (2). Sei jetzt

$$f = T_1^{\ell_1}\bullet\ldots\bullet T_n^{\ell_n}$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D}f &= \sum_{i=1}^{n} \rho(T_1^{\ell_1})\bullet\ldots\bullet \widetilde{D}(T_i^{\ell_i})\bullet\ldots\bullet\rho(T_n^{\ell_n}) && (\widetilde{D}\text{ ist eine R-Derivation})\\
&= \sum_{i=1}^{n} \rho(T_1^{\ell_1})\bullet\ldots\bullet D(T_i^{\ell_i})\bullet\ldots\bullet\rho(T_n^{\ell_n}) && \text{(nach (2))}\\
&= Df && \text{(D ist eine R-Derivation).}
\end{aligned}
$$

Weil $\widetilde{D}$ und D beides R-Derivationen sind,folgt

$$\widetilde{D}f = Df \text{ für jedes } f \in A.$$

QED.

4.1.2 Tangentialräume, eine heuristische Einführung 57

4.1.2 A Tangenten und Tangentialvektoren
Wir verwenden die Bezeichnungen des ersten Kapitels. Sei

$$X \subseteq \mathbb{A}^n$$

eine abgeschlossene Teilvarietät des $\mathbb{A}^n$. Wir identifizieren die k-Algebra der regulären Funktionen auf X mit

$$k[X] = k[T]/I = k[T_1,\ldots, T_n]/I,$$

wobei I das Ideal der polynomialen Funktionen auf $\mathbb{A}^n$ bezeichne, die auf X identisch Null sind. Wir wählen ein Erzeugendensystem des Ideals I, sagen wir

$$I = (f_1,\ldots,f_s).$$

Seien $x \in X$ ein Punkt und

$$L \subseteq \mathbb{A}^n$$

eine Gerade durch x. Die Punkte der Geraden L haben die Gestalt

$$x + t\bullet v$$

mit $t \in k$, wobei

$$v = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{A}^n - \{0\}$$

ein von Null verschiedener Richtungsvektor der Geraden sei. Die Werte von t, für welche x im Durchschnitt

$$X \bigcap L$$

liegt, findet man durch Lösung des Gleichungssystems

$$f_i(x + t\bullet v) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots , s. \tag{1}$$

Wegen $x \in X$ ist $t = 0$ ein Lösung. Bezeichne D_i die partielle Ableitung in k[T] nach T_i. Dann gilt nach der Ketten-Regel

$$f_i(x + t\bullet v) = t\bullet \sum_{j=1}^{n} (D_j f_i)(x+t\bullet v)\bullet v_j + t^2\bullet(\ldots).$$

Damit ist $t = 0$ genau dann eine "mehrfache Nullstelle" des Gleichungssystems (1), wenn

$$\sum_{j=1}^{n} (D_j f_i)(x)\bullet v_j = 0 \tag{2}$$

gilt für $i = 1,\ldots, s$.

Ist dies der Fall, so sagen wir, L ist eine Tangente und v ist ein Tangentialvektor an X.

4.1.2 B Richtungsableitungen
Bezeichne D_i nach wie vor die partielle Ableitung nach T_i im Polynomring

$$k[T] = k[T_1,\ldots, T_n]$$

und

$$D' := D'_v := \sum_{j=1}^{n} v_j \bullet D_j$$

die Ableitung in Richtung des Vektors $v = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{A}^n = k^n$. Als Linearkombination der k-Derivationen D_j ist D' eine k-Derivation von k[T].

$$D' \in Der_k(k[T]).$$

Bedingung (2) von 4.1.2 B bekommt mit Hilfe von D' die Gestalt

$$(D'f_i)(x) = 0 \text{ für } i = 1,...,s.$$

Bezeichne

$$M_x$$

das maximale Ideal von k[T] der polynomialen Funktionen, die in x gleich Null sind (vgl. 1.3.2 und 1.3.3). Dann bekommt die Forderung, daß v ein Tangentialvektor sein soll, die Gestalt

$$D'(I) \in M_x,$$

denn für $f = \sum_{i=1}^{s} r_i f_i$ mit $r_i \in k[T]$ ist

$$\begin{aligned} D'f(x) &= \sum_{i=1}^{s} r_i(x)D'f_i(x) + \sum_{i=1}^{s} f_i(x)D'\, r_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{s} r_i(x)D'f_i(x) \qquad\qquad \text{(wegen } x \in X, \text{ also } f_i(x) = 0) \end{aligned}$$

d.h.

$$D'f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I \Leftrightarrow (D'f)(x) = 0 \text{ für } i = 1,...,s.$$

Die k-lineare Abbildung

$$k[T] \longrightarrow k,\ f \mapsto (D'_v f)(x),$$

faktorisiert sich, falls v ein Tantentialvektor ist, über k[T]/I und induzier so eine k-lineare Abbildung

$$D_v: k[X] \longrightarrow k,\ (f \bmod I) \mapsto (D'f)(x).$$

Wenn wir

$$k = k_x$$

als k[X]-Modul mit der Multiplikation

$$f\bullet c := f(x)\bullet c \text{ für } f\in k[X] \text{ und } c \in k \tag{1}$$

versehen, wird D_v zu einer k-Derivation von k[X] mit Werten in k_x,

$$D_v \in Der_k(k[X], k_x)$$

(weil D' eine k-Derivation ist). Wir haben damit eine Abbildung

$$\{\text{Tangentialsvektoren an X im Punkt } x\in X\} \longrightarrow Der_k(k[X], k_x) \tag{2}$$

$$v = (v_1,...,v_n) \mapsto D_v\ ,$$

mit

$$D_v(f \bmod)) := D'_v f(x) := \sum_{j=1}^{n} v_j \bullet (D_j f)(x)$$

konstruiert. Diese Abbildung ist bijektiv. Wir können also den Tangentialraum an die algebraische Varietät X im Punkt $x \in X$ mit dem k-Vektorraum $Der_k(k[X], k_x)$ identifzieren.

Beweis. Injektivität von der Abbildung (2).

Ist $\overline{T}_i \in k[X]$ die Einschränkung von T_i auf X, so gilt wegen $D_j T_i = \delta_{ij}$ für die zu v gehörige Derivation

$$(D'_v \overline{T}_i)(x) = v_i.$$

Für unterschiedliche $v = (v_1,...,v_n)$ müssen die zugehörigen D'_v verschieden sein. Die Abbildung (2) ist injektiv.

Surjektivität der Abbildung (2).

Sei eine Derivation vorgegeben, sagen wir

$$D \in \mathrm{Der}_k(k[X], k_x).$$

Wir haben zu zeigen, es gibt einen Tangentialvektor v an X im Punkt x mit

$$D(f) = D'_v f(x) \text{ für jedes } f \in k[T].$$

Sei $\tilde{D}$ die Zusammensetzung

$$\tilde{D}: k[T] \xrightarrow{\sigma} k[X] \xrightarrow{D} k_x$$

von D mit der natürlichen Abbildung σ auf den Faktorring. Dann ist mit D auch $\tilde{D}$ eine k-Derivation. Auf Grund des Beispiels von 4.1.1 C mit $R = k$, $M = k_x$ und ρ der k-Algebra-Homomorphismus $k[T] \longrightarrow k$, $f \mapsto f(x)$ hat $\tilde{D}$ die Gestalt

$$\tilde{D}(f) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial T_j}(x) \cdot v_j$$

mit

$$v_j = \tilde{D}(T_j) = D(\sigma(T_j)) \in k,$$

d.h. es ist

$$\tilde{D}(f) = \sum_{j=1}^{n} D(\sigma(T_j)) \cdot (D_j f)(x) = (D'_v f)(x)$$

mit $v = (v_1, \dots, v_n)$ und

$$D'_v := \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot D_j.$$

Als k-Linearkombination der D_i ist D'_v eine k-Derivation

$$D'_v \in \mathrm{Der}_k(k[T]).$$

Nach Definition von $\tilde{D}$ liegt $I = \mathrm{Ker}(\sigma)$ im Kern von $\tilde{D}$. Insbesondere liegen die Erzeuger $f_1, \dots, f_s$ des Ideals I von X in k[T] im Kern, von D'_v

$$0 = \tilde{D}(f_\nu) = (D'_v f_\nu)(x) \text{ für } \nu = 1,...,s.$$

Es folgt $D'_v f_\nu \in M_x$ für jedes ν, also $D'_v(I) \subseteq M_x$, d.h. v ist ein Tangentialvektor an X im Punkt x (vgl. Formel (2) von 4.1.2 A). Wir haben gezeigt, die Abbildung (2) ist surjektiv.

Bemerkung

Die obige Beschreibung der Tangentialvektoren legt die folgende formale Definition der Tangentialräume an eine algebraische Varietät nahe.

4.1.3 Die Tangentialräume einer affinen Varietät 58

Seien X eine affine Varietät und $x \in X$. Der Tangentialraum an X im Punkt x ist definiert als der k-Vektorraum

$$T_x X := \mathrm{Der}_k(k[X], k_x).$$

Dabei ist

$$k_x$$

definiert als der k-Vektorraum k mit der durch

$$f \bullet c := f(x) \bullet c \text{ für } f \in k[X] \text{ und } c \in k$$

definierten k[X]-Modul-Struktur (vgl. 4.1.2 B (1)).

Sei

$$\phi: X \longrightarrow Y$$

eine reguläre Abbildung von affinen Varietäten. Der induzierte k-Algebra-Homomorphismus

$$\phi^*: k[Y] \longrightarrow k[X],\ f \mapsto f \circ \phi,$$

definiert nach Bemerkung 4.1.1 A (iii) die k-lineare Abbildung

$$d\phi_x := (\phi^*)_0 : T_x X = \mathrm{Der}_k(k[X], k_x) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[Y], k_{\phi(x)}) = T_{\phi(x)} Y$$

$$D \mapsto D \circ \phi^*.$$

Diese Abbildung heißt Differential von ϕ im Punkt $x \in X$.

Bemerkungen

(i) Die k[X]-Modul-Struktur von k_x mit der Multiplikation

$$k[X] \times k_x \longrightarrow k_x ,\ (f, c) \mapsto f(x) \bullet c,$$

wird durch den k-Algebra-Homomorphismus ϕ^* zur k[Y]-Modul-Struktur

$$k[Y] \times k_x \longrightarrow k_x ,\ (f, c) \mapsto f(\phi(x)) \bullet c,$$

welche mit der Einschränkung der k[Y]-Modul-Struktur von $k_{\phi(x)}$ auf das Bild von ϕ^* übereinstimmt.

(ii) Für je zwei reguläre Abbildungen $X \xrightarrow{\phi} Y$ und $Y \xrightarrow{\psi} Z$ und jeden Punkt $x \in X$ gilt

$$d(\psi \circ \phi)_x = d\psi_{\phi(x)} \circ d\phi_x ,$$

denn für $D \in T_x X$, also $d\phi_x(D) \in T_{\phi(x)} Y$ gilt

$$\begin{aligned}
(d\phi_x \circ d\psi_{\phi(x)})(D) &= d\phi_x(d\psi_{\phi(x)}(D)) \\
&= d\phi_x(D \circ \psi^*) \\
&= D \circ \psi^* \circ \phi^* \\
&= D \circ (\psi \circ \phi)^* \\
&= d(\psi \circ \phi)_x(D).
\end{aligned}$$

(iii) Das Differential der identischen Abbildung $id: X \longrightarrow X$ in $x \in X$ ist die identische Abbildung

$$did_x = id: T_x X \longrightarrow T_x X.$$

(iv) Sei ein Erzeugendensystem des Koordinatenrings k[X] gegeben, sagen wir

$$k[X] = k[x_1,...,x_n]$$

Dann ist jedes Element $f \in k[X]$ ein Polynom in den x_i, sagen wir

$$f = p(x_1,...,x_n) \text{ mit } p \in k[T_1,...,T_n]$$

Für jeden Tangentialvektor $D \in T_xX$ gilt dann

$$D(f) = D(p(x)) = \sum_{i=1}^{n} D(x_i)\bullet\frac{\partial p}{\partial T_i}(x).$$

Da beide Seiten dieser Identität k-linear sind bezüglich p, reicht es, die Identität für den Fall zu beweisen, daß p ein Potenzprodukt ist, sagen wir

$$p = T_1^{\alpha_1}\bullet...\bullet T_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n} T_i^{\alpha_i}$$

In diesem Fall ergibt sich die Identität aus der Produktregel:

$$D(f) = D(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}) = \sum_{j=1}^{n} (\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} / x_j^{\alpha_j})\bullet D(x_j^{\alpha_j})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} / x_j^{\alpha_j})\bullet(\alpha_j\bullet x_j^{\alpha_j-1})D(x_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} / x_j^{\alpha_j})\bullet(\frac{\partial T_j^{\alpha_j}}{\partial T_j})(x)D(x_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\prod_{i=1}^{n} T_i^{\alpha_i} / T_j^{\alpha_j})\bullet(\frac{\partial T_j^{\alpha_j}}{\partial T_j}))(x)D(x_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial T_j}(\prod_{i=1}^{n} T_i^{\alpha_i})(x)D(x_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial T_j}(x)D(x_j)$$

(v) Nachfolgend geben wir zwei alternative Beschreibungen des Tengentialraums einer affinen algebraischen Varietät.

4.1.4 Lemma: Der Raum T_xX als Dual von M_x/M_x^2 58

Seien X eine affine algebraische Varietät, $x \in X$ ein Punkt und $D \in T_xX$. Für

$$f, g \in M_x \ (\subseteq k[X])$$

gilt dann

$$D(f\bullet g) = f(x)\bullet Dg + g(x)\bullet Df = 0\bullet Dg + 0\bullet Df = 0,$$

also ist

$$D(M_x^2) = 0,$$

und D induziert eine k-lineare Abbildung

$$\lambda(D): M_x/M_x^2 \longrightarrow k, f \bmod M_x^2 \mapsto D(f)$$

Die Abbildung

$$\lambda: T_x X = \mathrm{Der}_k(k[X], k_x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2, k),\ D \mapsto (f \bmod M_x^2 \mapsto D(f))$$

ist ein k-linearer Isomorphismus mit der Umkehrung

$$\mu: \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2, k) \longrightarrow T_x X = \mathrm{Der}_k(k[X], k_x),\ \ell \mapsto (f \mapsto \ell(f\text{-}f(x) \bmod M_x^2).$$

Insbesondere ist

$$<\,,\,>: T_x X \times M_x/M_x^2 \longrightarrow k,\ (D, f \bmod M_x^2) \mapsto D(f),$$

eine <u>perfekte Paarung</u>[1] und jeder Tangentialvektor $D \in T_x X$ hat die Gestalt

$$D(f) = \ell(\delta(f)) \text{ für } f \in k[X]$$

mit eindeutig bestimmten $\ell \in \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2, k)$. Dabei sei

$$\delta(f) := f\text{-}f(x) \bmod M_x^2 \in M_x/M_x^2.$$

Wenn wir $\delta(f)$ mit Hilfe der perfekten Paarung als Linearform auf $T_x X$ betrachten, erhalten wir

$$\delta(f)(D) = <D, \delta(f)> = D(f\text{-}f(x)) = D(f)$$

für jeden Tangentialvektor $D \in T_x X$ und jede reguläre Funktion $f \in k[X]$. Es besteht ein natürlicher k-linearer Isomorphismus

$$M_x/M_x^2 \xrightarrow{\cong} (T_x X)^*,\ f \bmod M_x^2 \mapsto (D \mapsto D(f)).$$

Beweis. 1. <u>Schritt</u>. λ ist k-linear.

Für $D', D'' \in T_x X$ und $f \in M_x$ gilt

$$\begin{aligned}\lambda(D'+D'')(f \bmod M_x^2) &= (D'+D'')(f)\\ &= D'(f) + D''(f)\\ &= \lambda(D')(f \bmod M_x^2) + \lambda(D'')(f \bmod M_x^2),\end{aligned}$$

d.h.

$$\lambda(D'+D'') = \lambda(D') + \lambda(D'').$$

Für $D \in T_x X$, $c \in k$ und $f \in M_x$ gilt

$$\begin{aligned}\lambda(c\bullet D)(f \bmod M_x^2) &= (c\bullet D)(f)\\ &= c\bullet(D(f))\\ &= c\bullet\lambda(D)(f \bmod M_x^2),\end{aligned}$$

d.h.

$$\lambda(c\bullet D) = c\bullet\lambda(D).$$

2. <u>Schritt</u>. Konstruktion der zu λ inversen Abbildung.

Sei $\ell: M_x / M_x^2 \longrightarrow k$ eine k-lineare Abbildung. Für $f \in k[X]$ setzen wir

$$\mu(\ell)f := \ell(f - f(x) \bmod M_x^2).$$

---

[1] Beide (endlich-dimensionale) Vektorräume haben dieselbe Dimension und die Matrix der Bilinearform (bezüglich irgendwelcher Basen der beiden Räume) hat eine von Null verschiedene Determinante. Jeder der beiden Räume läßt sich mit Hilfe der Bilinearform mit dem Dual des anderen identifizieren.

Die Definition ist korrekt, weil f - f(x) den Wert 0 hat im Punkt x, d.h. f- f(x) $\in M_x$.
Wir erhalten so eine Abbildung

$$\mu(\ell): k[X] \longrightarrow k_x.$$

<u>Die Abbildung</u> $\mu(\ell)$ <u>ist</u> k-<u>linear</u>. Für f, f', f'' $\in$ k[X] unf c $\in$ k gilt

$$\begin{aligned}
\mu(\ell)(f'+f'') &= \ell((f'+f'') - (f'+f'')(x) \bmod M_x^2) \\
&= \ell((f'-f'(x)) + (f''-f''(x)) \bmod M_x^2) \\
&= \ell(f'-f(x) \bmod M_x^2) + \ell(f''-f''(x) \bmod M_x^2) \quad (\ell \text{ ist linear}) \\
&= \mu(\ell)(f') + \mu(\ell)(f'')
\end{aligned}$$

also

$$\mu(\ell)(f'+f'') = \mu(\ell)(f') + \mu(\ell)(f'').$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\mu(\ell)(c\bullet f) &= \ell(c\bullet f - (c\bullet f)(x) \bmod M_x^2) \\
&= c\bullet\ell(f-f(x) \bmod M_x^2) \qquad (\ell \text{ ist linear}) \\
&= c\bullet\mu(\ell)(f),
\end{aligned}$$

<u>Die Abbildung</u> $\mu(\ell)$ <u>ist eine Derivation</u>:
Für f, g $\in$ k[X] und ℓ: $M_x/M_x^2 \longrightarrow k$ linear über k gilt

$$\begin{aligned}
(f-f(x))\bullet(g-g(x)) &= f\bullet g - f\bullet g(x) - f(x)\bullet g + f(x)\bullet g(x) \\
&= -(f-f(x))\bullet g(x) - f(x)\bullet(g-g(x)) + f\bullet g - (f\bullet g)(x).
\end{aligned}$$

Weil f - f(x) und g - g(x) in M_x liegen, ist das Produkt dieser beiden Differenzen ein Element von M_x^2. Damit ist

$$f\bullet g - (f\bullet g)(x) \bmod M_x^2 = (f-f(x))\bullet g(x) + f(x)\bullet(g-g(x)) \bmod M_x^2 .$$

Wir wenden ℓ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\mu(\ell)(f\bullet g) &= \ell((f-f(x))\bullet g(x) + f(x)\bullet(g-g(x)) \bmod M_x^2) \\
&= g(x)\bullet\ell(f-f(x) \bmod M_x^2) + f(x)\bullet\ell(g-g(x) \bmod M_x^2) \quad (\ell \text{ ist linear}) \\
&= g(x)\bullet\mu(\ell)(f) + f(x)\bullet\mu(\ell)(g) \qquad (\text{nach Definiton von } \mu(\ell)) \\
&= g\bullet\mu(\ell)(f) + f\bullet\mu(\ell)(g) \qquad (\text{nach Definition der Multiplikation in } k_x).
\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, daß $\mu(\ell)$ eine Derivation ist.

Zusammen ergibt sich, die Abbildung

$$\mu: \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2 , k) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[X], k_x), \ell \mapsto \mu(\ell),$$

ist wohldefiniert.
<u>Die Abbildung</u> μ <u>ist invers zu</u> λ.
Für $\ell \in \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2 , k)$ und f $\in M_x$ gilt

$$\begin{aligned}
\lambda(\mu(\ell))(f \bmod M_x^2) &= \mu(\ell)(f) \qquad (\text{Definition von } \lambda) \\
&= \ell(f - f(x) \bmod M_x^2)
\end{aligned}$$

$$= \ell(f \bmod M_x^2) \qquad \text{(wegen } f \in M_x\text{)}$$

Da dies für alle $f \in M_x$ gilt, folgt

$$\lambda(\mu(\ell)) = \ell \text{ für jedes } \ell \in Hom_k(M_x/M_x^2\ , k),$$

also

$$\lambda \circ \mu = id.$$

Für $D \in T_xX = Der_k(k[X], k_x)$ und $f \in k[X]$ gilt

$$\begin{aligned}
\mu(\lambda(D))(f) &= \lambda(D)(f - f(x) \bmod M_x^2) && \text{(Definiton von } \mu(D)\text{)}\\
&= D(f\text{-}f(x)) && \text{(Definiton von D)}\\
&= Df - D(f(x)) && \\
&= Df && \text{(D ist eine k-Derivation)}
\end{aligned}$$

Da dies für alle $f \in k[X]$ gilt, folgt

$$\mu(\lambda(D)) = D,$$

also

$$\mu \circ \lambda = id.$$

QED.

4.1.5 Lemma: Tangentialvektoren als Derivationen 59

Seien X eine affine algebraische Varietät, $x \in X$ ein Punkt, $\mathcal{O}_X$ die Garbe der regulären Funktionen auf X und

$$\alpha: k[X] = \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}\ , f \mapsto f_x\ ,$$

der k-Algebra-Homomorphismus, welcher jede auf ganz X reguläre Funktion auf deren Keim im Punkt x abbildet. Dann ist die induzierte k-lineare Abbildung

$$\alpha_0: Der_k(\mathcal{O}_{X,x}\ , k_x) \longrightarrow Der_k(k[X], k_x), D \mapsto D \circ \alpha,$$

(vgl. Bemerkung 4.1.1 A (iii)) ein Isomorphismus. Dabei ist die Modul-Struktur von k_x über $\mathcal{O}_{X,x}$ bzw. k[X] gegeben durch

$$f \bullet c = f(x) \bullet c \text{ für } c \in k \text{ und } f \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ bzw. } f \in k[X].$$

Beweis. Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ von X im Punk x ist der Quotientenring von k[X] im Primideal M_x ,

$$\mathcal{O}_{X,x} = S^{-1}k[X] \text{ mit } S := k[X] - M_x$$

(vgl. 1.4.4). Damit ist die Behauptung gerade die Aussage von Bemerkung 4.1.1.A (v) im Spezialfall

$$R = k, A = k[X], S = k[X] - M_x \text{ und } N = k_x.$$

QED.

4.1.6 Lemma: T_xX beim Übergang zu affinen offenen Hauptmengen 59

Seien X eine affine Varietät, $x \in X$ und $U \subseteq X$ eine affine offene Teilmenge von X. Dann ist das Differential der natürlichen Einbettung

$$i: U \hookrightarrow X$$

ein k-linearer Isomorphismus

$$di_x : T_x U \xrightarrow{\cong} T_x X.$$

Beweis. Nach Definition des Halms $\mathcal{O}_{X,x}$ der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ von X im Punkt x in Bemerkung 1.4.3 (ii) ändert sich $\mathcal{O}_{X,x}$ nicht, wenn man X durch eine beliebige offene Umgebung von x ersetzt: Insbesondere induziert die natürliche Einbettung i einen Isomorphismus

$$\alpha: \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{U,x} .$$

von k-Algebren. Die induzierte Abbildung der Derivationenmoduln

$$\alpha_0 : T_x U = Der_k(\mathcal{O}_{U,x}, k_x) \longrightarrow Der_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x) = T_x X$$

ist deshalb bijektiv.

QED.

Bemerkung

Wir sind nun soweit, den Tangentialraum einer beliebigen algebraischen Varietät zu definieren (siehe die Definition in 1.6.9).

4.1.7 Tangentialräume algebraischer Varietäten 59

Seien X eine algebraische Varietät und $x \in X$ ein Punkt von X. Sind

$$U \subseteq X \text{ und } V \subseteq X$$

affine offene Umgebungen von x mit $V \subseteq U$, so induziert die natürliche Einbettung

$$V \hookrightarrow U$$

nach 4.1.6 einen natürlichen Isomorphismus $T_x V \xrightarrow{\cong} T_x U$. Dies erlaubt es uns, den <u>Tangentialraum</u> $T_x X$ <u>von</u> X <u>im Punkt</u> x als den Tangentialraum $T_x U$ mit U affine offene Umgebung von x in X zu betrachten. Genauer (und formaler): für beliebige affine offene Umgebungen

$$U' \subseteq X,\ U'' \subseteq X,\ V \subseteq X$$

von x in X mit

$$V \subseteq U' \text{ und } V \subseteq U''$$

bilden die natürlichen Einbettungen ein kommutatives Diagramm,

$$\begin{array}{ccc} U' & \hookrightarrow & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ V & \hookrightarrow & U'' \end{array}$$

Die Einschränkungen entlang dieser Einbettungen definieren ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{U',x} & \xleftarrow{\cong} & \mathcal{O}_{X,x} \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \mathcal{O}_{V,x} & \xleftarrow{\cong} & \mathcal{O}_{U'',x} \end{array}$$

von Isomorphismen von k-Algebren (nach der Definiton des Halms in Bemerkung 1.4.3 (ii)). Wir wenden den Funktor $Der_k(? , k_x)$ an und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_x U' & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x) \\ \cong\uparrow & & \uparrow\cong \\ T_x V & \xrightarrow{\cong} & T_x U'' \end{array}$$

Insbesondere bilden die Isomorphismen der Tangentialräume in x ein direktes System. Formal können wir deshalb den Tangentialraum von X im Punkt x definieren als den direkten Limes[2]

$$T_x X := \varinjlim_{U \ni x} T_x U = \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x).$$

Dabei ist die Modul-Struktur von $k = k_x$ über $\mathcal{O}_{X,x}$ definiert durch

$$f \bullet c := f(x) \bullet c \text{ für } f \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ und } c \in k.$$

Sei $\phi: X \longrightarrow Y$ eine reguläre Abbildung von algebraischen Varietäten und $x \in X$ ein Punkt. Diese reguläre Abbildung induziert einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\phi_x: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

und damit eine k-lineare Abbildung

$$d\,\phi_x: T_x X = \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{Y,f(x)}, k_{f(x)}) = T_{f(x)} Y,$$

das <u>Differential</u> von ϕ im Punkt x.
Ein Punkt x der algebraischen Varietät X heißt <u>nicht-singulär</u> oder auch <u>einfach</u>, wenn

$$\dim_k T_x = \dim_x X$$

gilt. Dabei wird mit

$$\dim_x X := \max \{\dim Y \mid Y \text{ ist irreduzible Komponente von } X \text{ mit } x \in Y\}$$

die <u>lokale Dimension</u> von X im Punkt x bezeichnet.[3] Wir sagen in diesem Fall auch, X ist <u>glatt</u> im Punkt x. Andernfalls heißt x <u>singulär</u>. Eine algebraische Varietät heißt <u>glatt</u>, wenn sie in jedem ihrer Punkte glatt ist.

Bemerkungen

(i) Wenn wir die Oberfläche einer Kugel oder eines Torus ins Auge fassen, so kann uns das zu der Erwartung führen, daß der Tangentialraum einer algebrraischen Varietät dieselbe Dimensioin haben sollte, wie die Varietät selbst. Aus der Theorie der reellen oder komplexen Mannigfaltigkeiten wissen wir, daß eine Mannigfaltigkeit im jedem ihrer Punkte lokal isomorph ist zum Tangentialraum in diesem Punkt, letzterer also dieselbe Dimension hat wie die Mannigfaltigkeit (in diesem Punkt). Die Beispiele (iii) und (iv) von 4.1.9 Aufgabe 1 zeigen, der von uns eingeführte Tangentialraum einer Varietät X kann eine größere Dimension haben, als die Varietät selbst.

---

[2] Im Original wird der inverse Limes verwendet. Da es sich um ein direktes System, das gleichzeitig ein inverses System ist und das aus Isomorphismen besteht, handelt, sind dirketer und inverser Limes kanonisch isomorph.

[3] Im Original werden nicht-singuläre Punkte definiert als Punkte mit

$$\dim_k T_x = \dim X.$$

Das hängt wohl damit zusammen, daß der Autor vor allem irreduzible Varietäten im Auge hat, bzw. Varietäten, deren irreduzible Komponenten paarweise disjunkt sind und dieselbe Dimension haben. Dies ists für algebraische Gruppen der Fall.

(ii) Dies ist kein Mangel der hier angegebenen Definition des Tangentialraums. Die Beispiele weisen nur darauf hin, daß algebraischen Varietäten (für $k = \mathbb{C}$) im allgemeinen keine Mannigfaltigkeiten sind: sie können singuläre Punkte besitzen. Man kann jedoch zeigen, die meisten Punkte einer algebraischen Varietät X sind nicht-singulär. Genauer, die Menge S der singulären Punkte von X ist eine abgesschlossene Teilmenge von X, von echt kleinerer Dimension

$$\dim S < \dim X.$$

Die Punkte von S sind also ganz besondere Punkte von X. Man nennt sie deshalb "singulär".

(iii) Allgemein gilt

$$\dim_x X \le \dim T_x X$$

für jede allgebraische Varietät X und jeden Punkt $x \in X$ (vgl. 4.3.3B (iii)).

(iv) Um das Phänomen besser zu verstehen, ist es sinnvol, den Tangentialkegel

$$C_x(X)$$

einer algebraischen Varietät X im Punkt x einzuführen. Dieser wird definiert als Vereinigung von Geraden durch x, welche aus den Sekanten von X durch x und einem weiteren Punkt $x' \in X$ entstehen, indem man eine Art Grenzübergang durchführt, bei welchem sich der Punkt x' an den vorgegebenen Punkt x annähert. Von diesem Tangentialkegel kann man zeigen,

$C_x(X)$ ist eine affine algebraische Varietät der Dimension $\dim C_x(X) = \dim_x X$.

Dabei erweist es sich als besser, den Tangentialkegel mit einer Schema-Struktur zu versehen, bei welcher der Koordinatenring nilpotente Elemente haben darf. Das erlaubt nämlich eine geometrische Beschreibung des von uns eingeführten Tangentialraums

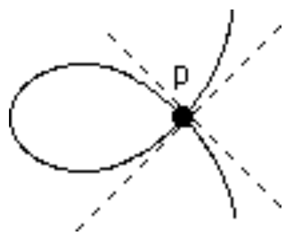
$$T_x X .$$

Dieser ist der kleinste k-Vektorraum, welcher den Tangentialkegel

$$C_x(X)$$

als abgeschlossenen Teilschema enthält.

(v) Eine Kurve X, die sich mit sich selbst schneidet,



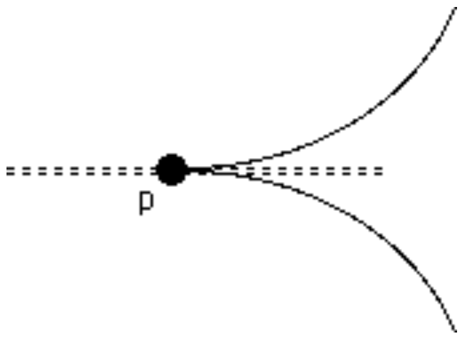
X: $y^2 = x^2+x^3$

wobei die beiden Zweige der Kurve im Schnittpunkt p verschiedene Richtungen haben, hat dort als Tangentialkegel die Vereinigung von zwei Geraden durch den Punkt p,

$$C_p(X): y^2 = x^2$$

Der kleinste Vektorraum, der diese beiden Geraden enthält, ist eine Ebene.

(vi) Eine Kurve X mit einer Spitze in einem Punkt p,



X: $y^2 = x^3$

hat dort als Tangentialkegel eine doppelt zu zählende Gerade,

$$C_p(X): y^2 = 0$$

mit dem Koordinatenring

$$k[C_p(X)] = k[x,y]/(y^2). \qquad (1)$$

Das affine Schema $C_p(X)$ ist kein abgeschlossenes Teilschema eines 1-dimensionalen Vektorraums V, denn dann wäre der Koordinatenring (1) Faktoralgebra des Koordinatenrings

k[V] = Polynomring über k in einer Unbestimmten

von V, was er nicht ist, denn jede Faktoralgebra von k[V], die von k[V] verschieden ist, ist Koordinatenring eines Schemas einer Dimensioin < dim V (weil V irreduzibel ist).

(v) Mehr Einzelheiten zum Tangentialkegel findet man im Buch von Shafarevich [1], Teil I, Kapitl II, Abschnitt 5.

4.1.8 Die Tangentialräume einer F-Varietät 59

Seien $F \subseteq k$ ein Teilkörper von k, X eine affine F-Varietät und

$$x \in X(F)$$

ein F-rationaler Punkt (vgl. 1.6.14), d.h. ein F-Algebra-Homomorphismus

$$x: F[X] \longrightarrow F,\ f \mapsto f(x),$$

(vgl. 1.3.7 B). Die Bezeichnungsweise der Abbildungsvorschrift ist dadurch gerechtfertigt, daß wir x mit einem Punkt von X identifizieren können, für welchen die Abbildung x gerade zur Auswertung an der Stelle x wird (vgl. Bemerkung 1.6.7 B (ii))

Durch die Multiplikationsvorschrift

$$f\bullet c := f(x)\bullet c \text{ für } f \in F[X] \text{ und } c \in F$$

wird F zu einem F[X]-Modul, den wir mit

$$F_x$$

bezeichnen wollen. Dann heißt

$$T_x X\,(F) := Der_F(F[X], F_x)$$

<u>Raum der</u> F-<u>rationalen Punkte</u> von $T_x X$.

Bemerkungen

(i) $T_x X\,(F)$ ist ein F-Vektorraum mit

$$k \otimes_F T_x X\,(F) \cong Der_k(k \otimes_F F[X], k \otimes_F F_x) \cong Der_k(k[X], k_x) = T_x\, X.$$

$$c\otimes D \mapsto (d\otimes f \mapsto (cd)\otimes D(f)) \mapsto (f = \sum_i c_i f_i \text{ mit } f_i \in F[X] \mapsto \sum_i cdc_i D(f_i)$$

Wir betrachten hier den F-Vektorraum $T_x X$ (F) mit Hilfe der natürlichen Injektion

$$T_x X\,(F) \hookrightarrow k\otimes_F T_x X\,(F),\ v \mapsto 1\otimes f,$$

als Unterraum des Tensorproduks und identifizieren ihn mit dessen Bild in T_x X.

(ii) Der k-lineare Isomorphismus

$$\lambda: T_x X = \mathrm{Der}_k(k[X], k_x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2, k),\ D \mapsto (f \bmod M_x^2 \mapsto D(f))$$

von 4.1.4 bildet (für F-rationale Punkte $x \in X$) die F-Struktur des Tangentialraums gerade ab in in

$$\lambda(T_x X\,(F)) = \mathrm{Hom}_F(M_x(F)/M_x(F)^2, F)$$

mit $M_x(F) := F[X] \cap M_x$.

(iii) Ist $\phi: X \longrightarrow Y$ eine über F definierte reguläre Abbildung von affinen F-Varietäten und $x \in X(F)$ ein F-rationaler Punkt, so induziert das Differential

$$d\phi_x: T_x X \longrightarrow T_{\phi(x)} Y$$

eine F-lineare -Abbildung

$$d\phi_x(F): T_x X\,(F) \longrightarrow T_{\phi(x)} Y\,(F).$$

(iv) Der Begriff des F-rationalen Punkts des Tangentialraums läßt sich analog zum Fall F = k auf den Fall von beliebigen algebraischen Varietäten übertragen.

Beweis. Zu (i). 1. Schritt. Beweis linken der Isomorphie (von k-Vektorräumen).
Jede F-Derivation D: $F[X] \longrightarrow F_x$ ist insbesondere F-linear, definiert also eine Abbildung

$$k\times F[X] \longrightarrow k\otimes_F F_x,\ (c, f) \mapsto c\otimes D(f),$$

welche bilinear ist über F, also eine Abbildung

$$1\otimes_F D : k\otimes_F F[X] \longrightarrow k\otimes_F F_x,\ c\otimes f \mapsto c\otimes D(f),$$

welche k-linear ist. Durch direktes Nachrechnen sieht man, es handelt sich um eine Derivation: für $f,g \in F[X]$ und $c,d \in k$ gilt

$$\begin{aligned}(1\otimes_F D)((c\otimes f)\cdot(d\otimes g)) &= (1\otimes_F D)((cd)\otimes(fg))\\ &= (cd)\otimes D(fg)\\ &= (cd)\otimes(f(x)\cdot Dg + g(x)\cdot Df)\\ &= (c\otimes f)(x)\cdot(d\otimes Dg) + (d\otimes g)(x)\cdot(c\otimes Df)\\ &= (c\otimes f)(x)\cdot(1\otimes_F D)(d\otimes g) + (d\otimes g)(x)\cdot(1\otimes_F D)(c\otimes f)\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, die Abbildung

$$\varphi: k\otimes_F T_x X\,(F) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k\otimes_F F[X], k\otimes_F F_x),\ c\otimes D \mapsto c\cdot(1\otimes_F D),$$

ist wohldefiniert und k-linear. Wir haben noch zu zeigen, sie ist bijektiv.
Sei $\{\omega_i\}_{i\in I}$ eine F-Vektorraum-Basis von k.

Die Abbildung φ ist injektiv: Sei $D \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Wir haben zu zeigen, D ist gleich 0. Dazu schreiben wir D in der Gestalt

$$D = \sum_{i\in I} \omega_i \otimes_F D_i \text{ mit } D_i \in T_x X\,(F) = Der_F(F[X], F_x).$$

Weil D im Kern von φ liegt, gilt für beliebige $c \in k$ und $f \in F[X]$

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi\Big(\sum_{i\in I} \omega_i \otimes_F D_i\Big)(c\otimes f) \\
&= \sum_{i\in I} \varphi(\omega_i \otimes_F D_i)(c\otimes f) && (\varphi \text{ ist k-linear}) \\
&= \sum_{i\in I} \omega_i \bullet ((1\otimes_F D_i)(c\otimes f)) && (\text{Definition von } \varphi) \\
&= \sum_{i\in I} \sum_{i\in I} \omega_i \bullet (c\otimes_F D_i(f)) && (\text{Definition von } 1\otimes_F D_i) \\
&= \sum_{i\in I} (\omega_i \bullet c)\otimes_F D_i(f)
\end{aligned}$$

Speziell für c = 1 erhalten wir

$$0 = \sum_{i\in I} \omega_i \otimes_F D_i(f) \qquad \text{für jedes } f \in F[X].$$

Die Wahl der Basis der ω_i definiert eine Zerlegung von k in eine direkte Summe von Examplaren von F. Weil das Tensor-Produkt mit direkten Summen kommutiert, definiert diese Basis auch eine Zerlegung von $k\otimes_F F_x$ in eine direkte Summe von Exemplaren von F_x. Die gerade bewiesene Identität bedeutet, das jede Komponente des Elements $\sum_{i\in I} \omega_i \otimes_F D_i(f) \in k\otimes_F F_x$ bezüglich dieser direkten Summen-Zerlegung gleich Null ist, d.h. es gilt $D_i(f) = 0$ für jedes $f \in F[X]$, d.h. es ist $D_i = 0$ für jedes i, also

$$D = \sum_{i\in I} \omega_i \otimes_F D_i = 0.$$

<u>Die Abbildung</u> φ <u>ist surjektiv</u>:

Für jedes $\tilde{D} \in Der_k(k\otimes_F F[X], k\otimes_F F_x)$ und jedes $f\in F[X]$ können wir schreiben

$$\tilde{D}(1\otimes f) = \sum_{i\in I} \omega_i \otimes D_i(f)$$

mit eindeutig bestimmten $D_i(f) \in F_x$. Die Abbildungen

$$D_i \colon F[X] \longrightarrow F_x$$

sind F-linear und für $f,g\in F[X]$ gilt

$$\begin{aligned}\widetilde{D}(1\otimes fg) &= \widetilde{D}((1\otimes f)\bullet(1\otimes g))\\ &= f(x)\bullet \widetilde{D}(1\otimes g) + g(x)\bullet \widetilde{D}(1\otimes f)\\ &= \sum_{i\in I} \omega_i\otimes f(x)D_i(g) + \sum_{i\in I} \omega_i\otimes g(x)D_i(f)\\ &= \sum_{i\in I} \omega_i\otimes(f(x)D_i(g) + g(x)D_i(f))\end{aligned}$$

also $D_i(f\bullet g) = f(x)\bullet D_i(g)+ g(x)\bullet D_i(f)$. Wir haben gezeigt $D_i \in T_xX$ (F). Nach Konstruktion gilt

$$\varphi\Big(\sum_{i\in I} \omega_i\otimes D_i\Big)(c\otimes f) = \sum_{i\in I} c\bullet\omega_i\otimes D_i(f) = c\bullet\widetilde{D}(1\otimes f) = \widetilde{D}(c\otimes f),$$

also $\varphi\big(\sum_{i\in I} \omega_i\otimes D_i\big) = \widetilde{D}$, d.h. φ ist auch surjektiv.

2. <u>Schritt</u>. <u>Beweis der zweiten Isomorphie</u>(von k-Vektorräumen).
Die Isomorphie kommt von k-linearen Isomorphismen

$$\alpha:k\otimes_F F[X] \xrightarrow{\cong} k[X] \text{ und } \beta:k\otimes_F F_x \xrightarrow{\cong} k_x,$$

wobei α sogar ein Isomorphismus von k-Algebren ist. Es reicht letztere zu anzugeben. Die Abbildung links wird durch die natüriche Einbettung

$$F[X] \hookrightarrow k[X]$$

induziert und ist ein Isomorphismus, weil F[X] eine F-Struktur von k[X] ist, genauer

$$\alpha:k\otimes_F F[X] \xrightarrow{\cong} k[X],\ c\otimes f \mapsto cf,$$

ist ein k-linearer Isomorphismus. Aus der Abbildungsvorschrift liest man ab, α ist sogar ein Homomorphismus von Ringen mit 1:

$$\begin{aligned}\alpha((c'\otimes f')\bullet(c''\otimes f'')) &= \alpha((c'c'')\otimes(f'f''))\\ &= c'c''f'f''\\ &= (c'f')\bullet(c''f'')\\ &= \alpha(c'\otimes f')\bullet\alpha(c''\otimes f'')\end{aligned}$$

und

$$\alpha(1\otimes 1) = 1\bullet 1 = 1,$$

d.h. α ist ein Isomorphismus von k-Algebren.
Die Abbildung rechts wird durch die Multiplikation in k definiert,

$$\beta:k\otimes_F F_x \xrightarrow{\cong} k_x,\ c\otimes d \mapsto c\bullet d,$$

und ist trivialerweise ein Isomorphismus von k-Vektorräumen. Wir haben zu zeigen, die $k\otimes_F F[X]$-Modul-Struktur von $k\otimes F_x$ auf der linken Seite entspricht gerade der $k[X]$-Modul-Struktur von k_x.

Für $c\in k$, $f \in F[X]$, $a\in k$, $b\in F_x$ gilt

$$(c\otimes f)\bullet(a\otimes b) = (c\bullet a)\otimes(f\bullet b) = (c\bullet a)\otimes(f(x)\bullet b)$$

also

$$
\begin{aligned}
\beta((c\otimes f)\bullet(a\otimes b)) &= \beta((c\bullet a)\otimes(f(x)\bullet b)) && \text{(Definiton von F[X]-Modul-Struktur von } F_x \\
&= c\bullet a\bullet f(x)\bullet b && \text{(Definition von } \beta) \\
&= c\bullet f(x)\bullet a\bullet b && \\
&= c\bullet f(x)\bullet\beta(a\otimes b) && \text{(Definition von } \beta) \\
&= (c\bullet f)(x)\bullet\beta(a\otimes b) && \\
&= \alpha(c\otimes f)(x)\bullet\beta(a\otimes b) && \text{(Definition von } \alpha) \\
&= \alpha(c\otimes f)\bullet\gamma(a\otimes b) && \text{(Definition der k[X]-Modul-Struktur von } k_x)
\end{aligned}
$$

Da β und α additiv sind, folgt

$$\gamma(u\bullet v) = \alpha(u)\bullet\gamma(v) \qquad \text{für } u \in k\otimes_F F[X] \text{ und } v \in k\otimes_F F_x\,,$$

d.h. es gilt die Behauptung.

<u>Zu (ii)</u>. 1. <u>Schritt</u>. $M_x(F) / M_x(F)^2$ ist eine F-Struktur von $M_e / M_e{}^2$.

Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_x \arrow[r] & k[G] \arrow[r, "\alpha"] & k \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_x(F) \arrow[r] \arrow[u, hook] & F[G] \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, hook] & F \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}
$$

Die vertikalen Abbildungen sollen die natürlichen Einbettungen sein. Die Abbildungen α und β seien die Auswertungen im F-rationalen Punkt $x \in X$,

$$\alpha(f) = f(x),\ \beta(f) = f(x).$$

Die Abbildung β ist wohldefiniert, weil x ein F-rationaler Punkt von X ist. Nach Definition gilt

$$M_x = \mathrm{Ker}(\alpha) \text{ und } M_x(F) = \mathrm{Ker}(\beta).$$

Die Zeilen sind also tatsächlich exakt.

Die vertikalen Abbildung faktorisieren sich über die Tensorprodukte iher Definitionsbereiche mit k über F (weil die Bilder k-Vektorräume sind). Wir erhalten so ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_x \arrow[r] & k[G] \arrow[r, "\alpha"] & k \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & k\otimes_F M_x(F) \arrow[r] \arrow[u, "\varphi'"'] & k\otimes_F F[G] \arrow[r] \arrow[u, "\cong\ \varphi"'] & k\otimes_F F \arrow[r] \arrow[u, "\cong\ \varphi''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_x(F) \arrow[r] \arrow[u, hook] & F[G] \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, hook] & F \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}
$$

Die mittlere Zeile ist exakt, weil $k\otimes_F$ ein exaker Funktor ist. Die Abbildung φ ist ein Isomorphismus, weil F[G] eine F-Struktur von k[G] ist (nach Definition). Die Abbildung φ'' ist trivialerweise ein Isomorphismus. Auf Grund der beiden oberen exakten Sequenzen ist damit auch φ' ein Isomorphismus, d.h.

$$M_x(F) \text{ ist eine F-Struktur von } M_e.$$

Weil $k\otimes_F$ ein exakter Funktor ist, folgt

$$\begin{aligned} k\otimes_F M_x(F) / M_x(F)^2 &\cong k\otimes_F M_x(F) / k\otimes_F M_x(F)^2 \\ &= k\otimes_F M_x(F) / (k\otimes_F M_x(F))^2 \\ &= M_x / M_x^2 , \end{aligned}$$

d.h. $M_x(F) / M_x(F)^2$ ist eine F-Struktur von M_x / M_x^2 .
Insbesondere ist die natürliche Abbildung

$$M_x(F) / M_x(F)^2 \longrightarrow k\otimes_F M_x(F) / M_x(F)^2 \xrightarrow{\cong} M_x / M_x^2,$$
$$(f \bmod M_x(F)^2) \mapsto 1\otimes(f \bmod M_x(F)^2) \mapsto f \bmod M_x^2,$$

injektiv.
2.Schritt. Beweis der Behauptung.

Sei $D \in T_xX (F) = \mathrm{Der}_F(F[X], F_x)$ und bezeichne $\widetilde{D}$ das Bild von D bei der Abbildung von (i). Dann gilt für jedes $f \in F[X]$

$$\widetilde{D}(f) = D(f) \in F_x.$$

Für $f \in M_x(F) = F[X] \bigcap M_x$ ist also

$$\lambda(D)(f \bmod M_x^2) = \widetilde{D}(f) = D(f) \in F.$$

Wir setzen λ mit der Einschränkung auf den F-linearen Unterraum

$$T^*(F) := M_x(F) / M_x(F)^2 \text{ von } M_x / M_x^2$$

zusammen und erhalten eine F-lineare Abbildung

$$\lambda_F: (T_xX)(F) = \mathrm{Der}_F(F[X], F_x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_F(T^*(F), F), D \mapsto \lambda(\widetilde{D})|_{T^*(F)}$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, λ_F ist ein Isomorphismus.

λ_F ist injektiv.

Weil $T^*(F)$ nach dem ersten Schritt eine F-Struktur von M_x/M_x^2 ist, ist $\lambda(\widetilde{D})$ durch die Einschränkung auf $T^*(F)$ eindeutig festgelegt. Insbesondere ist $\lambda(\widetilde{D})$ gleich Null, falls die Einschränkung von $\lambda(\widetilde{D})$ gleich Null ist. Weil λ ein Isomorphismus ist, ist λ_F zumindest injektiv.

λ_F ist bijektiv.

Weil λ_F eine F-lineare injektive Abbildung ist, reicht es zu zeigen, Definitionsbereich und Wertevorrat von λ_F haben dieselbe (endliche) Dimension. Es gilt

$$\begin{aligned} \dim_F (T_xX)(F) &= \dim_k T_xX && ((T_xX)(F) \text{ ist eine F-Struktur von } T_xX) \\ &= \dim_k \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2, k) && (\lambda \text{ ist ein k-linearer Isomorphismus}) \end{aligned}$$

$$= \dim_k M_x/M_x^2$$

$$= \dim_F T^*(F) \qquad\qquad (T^*(F) \text{ ist eine F-Struktur von } M_x/M_x^2)$$

$$= \dim \operatorname{Hom}_F(T^*(F), F)$$

Die Dimension $\dim_k M_x/M_x^2$ ist endlich, weil M_x ein endlich erzeugtes Ideal ist im noetherschen Ring k[X]

<u>Zu (iii)</u>. Weil $\phi: X \longrightarrow Y$ eine über F definierte reguläre Abbildung von affinen F-Varietäten ist, besteht ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[X] & k[Y] \arrow[l, "\phi^*"'] \\ F[X] \arrow[u, hook] & F[Y] \arrow[u, hook] \arrow[l, "\phi^*|_{F[X]}"'] \end{tikzcd}$$

Dabei seien die vertikalen Abbildungen die natürlichen Einbettungen und die untere horizontale Abbildung die Einschränkung von ϕ^*. Der untere F-Algebra-Homomorphismus induziert eine F-lineare Abbildung

$$d\phi_x(F): \operatorname{Der}_F(F[X], F_x) \longrightarrow \operatorname{Der}_F(F[Y], F_{\phi(x)}),\ D \mapsto D\circ\phi^*|_{F[X]}.$$

Wie im Fall F = k nutzen wir hier die Tatsache, daß die durch ϕ^* auf dem F[X]-Modul F_x definierte F[Y]-Modul-Struktur gerade die F[Y]-Modul-Struktur von $F_{\phi(x)}$ ist.

Für jede lineare Abbildung $f: V \longrightarrow W$ von F-Vektorräumen haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} k\otimes_F V \arrow[r, "k\otimes f"] & k\otimes_F W \\ V \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & W \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1\otimes v \arrow[r, mapsto] & 1\otimes f(v) \\ v \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & f(v) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Speziell für $f = d\phi_x(F)$ hat dieses die folgende Gestalt.

$$\begin{tikzcd} k\otimes_F \operatorname{Der}_F(F[X],F_x) \arrow[r, "k\otimes d\phi_x(F)"] & k\otimes_F \operatorname{Der}_F(F[Y],F_{\phi(x)}) \\ \operatorname{Der}_F(F[X],F_x) \arrow[u, hook] \arrow[r, "d\phi_x(F)"] & \operatorname{Der}_F(F[Y],F_{\phi(x)}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1\otimes D \arrow[r, mapsto] & 1\otimes(D\circ\phi^*|_{F[X]}) \\ D \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & D\circ\phi^*|_{F[X]} \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Mit Hilfe des linken Isomorphismus von Bemerkung (i) erhalten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Der}_k(k\otimes_F F[X], k\otimes_F F_x) \arrow[r, "d\phi_x"] & \operatorname{Der}_k(k\otimes_F F[Y], k\otimes_F F_{\phi(x)}) \\ \operatorname{Der}_F(F[X],F_x) \arrow[u, hook] \arrow[r, "d\phi_x(F)"] & \operatorname{Der}_F(F[Y],F_{\phi(x)}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Und mit Hilfe des rechten Isomorphismus von Bemerkung (i) das folgende.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Der}_k(k[X],k_x) & \xrightarrow{d\phi_x} & \mathrm{Der}_k(k[Y],k_{\phi(x)}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Der}_F(F[X],F_x) & \xrightarrow{d\phi_x(F)} & \mathrm{Der}_F(F[Y],F_{\phi(x)})
\end{array}$$

Dieses Diagramm können wir aber auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\begin{array}{ccc}
T_xX & \xrightarrow{d\phi_x} & T_{\phi(x)}Y \\
\uparrow & & \uparrow \\
T_xX(F) & \xrightarrow{d\phi_x(F)} & T_{\phi(x)}Y(F)
\end{array}$$

Seine Kommutativität ist gerade die Behauptung von Bemerkung (iii).

Zu (iv).

1. Schritt. Die Aussage von 4.1.5 läßt sich auf den Fall von F-Strukturen verallgemeinern:

Seien X eine affine F-Varietät, $x \in X(F)$ ein F-rationaler Punkt, $\mathcal{O}_X(F)$ die Teilgarbe der F-Strukturen der Garbe $\mathcal{O}_X$ der regulären Funktionen auf X und

$$\alpha_F: F[X] = \mathcal{O}_X(F)(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}(F) := F[X]_x,\ f \mapsto f_x,$$

die natürliche Abbildung der F-Algebra F[X] in den Quotientenring im Primideal, welches gerade der Kern der Auswertungsabbildung

$$F[X] \longrightarrow F,\ f \mapsto f(x),$$

ist. Dann ist die induzierte F-lineare Abbildung

$$\alpha_{F0}: \mathrm{Der}_F(\mathcal{O}_{X,x}(F),F_x) \longrightarrow \mathrm{Der}_F(F[X],F_x),\ D \mapsto D\circ\alpha_F,$$

(vgl. Bemerkung 4.1.1 A (iii)) ein Isomorphismus. Dabei ist die Modul-Struktur von F_x über $\mathcal{O}_{X,x}(F)$ bzw. F[X] gegeben durch

$$f\bullet c = f(x)\bullet c \text{ für } c \in F \text{ und } f \in \mathcal{O}_{X,x}(F) \text{ bzw. } f \in F[X].$$

Nach Definition ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}(F)$ Quotientenring von F[X] im Primideal

$$M_x \cap F[X],$$

$$\mathcal{O}_{X,x} = S^{-1}F[X] \text{ mit } S := F[X] - M_x$$

Damit ist die Behauptung gerade die Aussage von Bemerkung 4.1.1.A (v) im Spezialfall

$$R = F,\ A = F[X],\ S = F[X] - M_x \text{ und } N = F_x.$$

2. Schritt. Die Aussage von 4.1.6 läßt sich auf den Fall von F-Strukturen verallgemeinern:

Seien X eine affine F-Varietät, $x \in X(F)$ ein F-rationaler Punkt und $U \subseteq X$ eine affine F-offene Teilmenge (vgl. 2.3.8) von X. Dann induziert das Differential der natürlichen Einbettung

$$i: U \hookrightarrow X$$

einen F-linearen Isomorphismus auf den F-Strukturen der Tangentialräume

$$di_x(F)\colon T_xU(F) \xrightarrow{\cong} T_xX\ (F).$$

Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}(F)$ ändert sich nicht, wenn man X durch eine beliebige F-offene Umgebung von x ersetzt. Insbesondere induziert die natürliche Einbettung i einen Isomorphismus

$$\alpha_F\colon \mathcal{O}_{X,x}(F) \longrightarrow \mathcal{O}_{U,x}(F)\ .$$

von F-Algebren. Die induzierte Abbildung der Derivationenmoduln

$$\alpha_{F0}\colon T_xU\ (F) = Der_F(\mathcal{O}_{U,x}(F)\ ,\ F_x) \longrightarrow Der_F\ (\mathcal{O}_{X,x}(F)\ ,\ F_x) = T_xX\ (F)$$

ist deshalb bijektiv.

3. Schritt. Seien X eine (nicht notwedig affine) F-Varietät und $x \in X(F)$ ein F-rationaler Punkt von X. Sind

$$U \subseteq X \text{ und } V \subseteq X$$

affine F-offene Umgebungen von x mit $V \subseteq U$, so induziert die natürliche Einbettung

$$V \hookrightarrow U$$

nach dem zweiten Schritt einen natürlichen Isomorphismus $T_xV(F) \xrightarrow{\cong} T_xU(F)$. Dies erlaubt es uns, die F-Struktur des Tangentialraum T_xX von X im Punkt x als den Tangentialraum $T_xU(F)$ mit U affine F-offene Umgebung von x in X zu betrachten. Genauer (und formaler): für beliebige affine F-offene Umgebungen

$$U' \subseteq X,\ U'' \subseteq X,\ V \subseteq X$$

von x in X mit

$$V \subseteq U' \text{ und } V \subseteq U''$$

bilden die natürlichen Einbettungen ein kommutatives Diagramm,

$$\begin{array}{ccc} U' & \hookrightarrow & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ V & \hookrightarrow & U'' \end{array}$$

Die Einschränkungen entlang dieser Einbettungen definieren ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{U',x}(F) & \xleftarrow{\cong} & \mathcal{O}_{X,x}(F) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \mathcal{O}_{V,x}(F) & \xleftarrow{\cong} & \mathcal{O}_{U'',x}(F) \end{array}$$

von Isomorphismen von F-Algebren (nach der Definiton des Halms in Bemerkung 1.4.3 (ii)). Wir wenden den Funktor $Der_k(\ ?\ ,\ k_x)$ an und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_xU'(F) & \xrightarrow{\cong} & Der_F(\mathcal{O}_{X,x}\ (F),F_x) \\ \cong\uparrow & & \uparrow\cong \\ T_xV(F) & \xrightarrow{\cong} & T_xU''\ (F) \end{array}$$

Insbesondere bilden diese Isomorphismen der F-Strukturen der Tangentialräume in x ein direktes (und inverses) System. Formal können wir deshalb die F-Struktur des Tangentialraum von X im Punkt x definieren als den direkten Limes[4]

$$T_x X(F) := \varinjlim_{U \ni x} T_x U(F) = \mathrm{Der}_F(\mathcal{O}_{X,x}(F), F_x).$$

Dabei ist die Modul-Struktur von $F = F_x$ über $\mathcal{O}_{X,x}(F)$ definiert durch

$$f \bullet c := f(x) \bullet c \text{ für } f \in \mathcal{O}_{X,x}(F) \text{ und } c \in F.$$

Man beachte, die Elemente von $\mathcal{O}_{X,x}(F)$ sind lokal in einer F-offenen Umgebung von x von der Gestalt $\frac{a}{b}$ mit $a,b \in F[U]$ und $b \neq 0$ auf U, wobei U eine F-offene Umgebung von x bezeichnet.
QED.

4.1.9 Aufgaben zum Tangentialraum 60

4.1.9 Aufgabe 1: Beispiele 60

Beschreiben sie den Tangentialraum mit Hilfe von 4.1.4 in den folgenden Spezielfällen.
(i) X ist ein Punkt.
(ii) $X := \mathbb{A}^n$.
(iii) $X := \{(a,b) \in \mathbb{A}^2 \mid ab = 0\}$ und $x := (0,0)$.
(iv) $X := \{(a,b) \in \mathbb{A}^2 \mid a^2 = b^3\}$ und $x := (0,0)$ falls die Charakteristik von k ungleich 2 und ungleich 3 ist.

Beschreibungen. Zu (i). Die einpunktige Varietät.
Für $X = \{p\}$ gilt

$$k[X] = k$$
$$T_x X = \mathrm{Der}_k(k,k) = 0$$

Man beachte, für $D \in \mathrm{Der}_k(k,k)$ und $c \in k$ gilt $D(c) = c \bullet D(1) = c \bullet 0 = 0$.
Mit Hilfe von 4.1.4 erhält man dasselbe Ergebnis: M_x ist das einzige maximale Ideal von $k[X] = k$, nämlich $M_x = 0$. Es folgt $M_x/M_x^2 = 0$, also

$$T_x X = \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2, k) = \mathrm{Hom}_k(0, k) = 0.$$

Zu (ii). Der affine RAum.
Für $X = \mathbb{A}^n$ gilt

$$k[X] = k[T_1,\ldots,T_n]$$

und mit $x = (x_1,\ldots,x_n) \in X$ ist

$$M_x = (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$$
$$M_x/M_x^2 = k\bullet(t_1 - x_1), \ldots, k\bullet(t_n - x_n) \quad \text{mit } t_i := T_i \bmod M_x^2.$$

[4] Im Original wird der inverse Limes verwendet. Da es sich um ein direktes System, das gleichzeitig ein inverses System ist und das aus Isomorphismen besteht, handelt, sind dirketer und inverser Limes kanonisch isomorph.

Die $t_i - x_i$ bilden eine Basis von des k-Vektorraums M_x/M_x^2. Das Bild des i-ten Elements $(t_i - x_i)^\vee$ der dualen Basis in

$$T_x X = \mathrm{Der}_k(k[X], k_x)$$

beim Isomorphismus von 4.1.4 ist die k-Derivation D_i

$$k[X] \longrightarrow k_x$$

mit

$$D_i(T_j) = D_i(T_j - x_j) = \delta_{ij},$$

d.h. D_i ist die partielle Ableitung von T_i an der Stelle x,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}\Big|_x$$

und $T_x X$ ist der k-Vektorraum mit der Basis $D_1,...,D_n$,

$$T_x X = k\bullet \frac{\partial}{\partial T_1}\Big|_x + ... + k\bullet \frac{\partial}{\partial T_n}\Big|_x$$

<u>Zu (iii)</u>. <u>Zwei sich schneidende Geraden</u>.
Für $X = V(T_1 T_2)$ und $x = (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} k[X] &= k[T_1,T_2]// (T_1 T_2) \\ M_x &= (T_1,T_2)\bullet k[X] \\ M_x/M_x^2 &= (T_1,T_2)/(T_1,T_2)^2 + (T_1 T_2) \\ &= (T_1,T_2)/(T_1,T_2)^2 \end{aligned}$$

Das Dual von $T_x X$ ist dasselbe wie das des $\mathbb{A}^2$ (vgl. (ii) mit n = 2). Also ist

$$T_x X = T_x \mathbb{A}^2$$

<u>Zu (iv)</u>. <u>Die semikubische Parabel</u> (ordinary cusp).
Für $X = V(T_1^2 - T_2^3)$ und $x = (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} k[X] &= k[T_1,T_2]// (T_1^2 - T_2^3) \\ M_x &= (T_1,T_2)\bullet k[X] \\ M_x/M_x^2 &= (T_1,T_2)/(T_1,T_2)^2 + (T_1^2 - T_2^3) \\ &= (T_1,T_2)/(T_1,T_2)^2 \end{aligned}$$

Das Dual von $T_x X$ ist dasselbe wie das des $\mathbb{A}^2$ (vgl. (ii) mit n = 2). Also ist

$$T_x X = T_x \mathbb{A}^2$$

QED.

4.1.9 Aufgabe 2: Produktvarietäten 60

Seien X und Y algebraische Varietäten und $x \in X$, $y \in Y$ zwei Punkte.
(i) Dann ist die k-lineare Abbildung

$$\varphi: T_{(x,y)} X\times Y \xrightarrow{\cong} T_x X \oplus T_y Y,\ D \mapsto ((dp_1)_{(x,y)}(D), (dp_2)_{(x,y)}(D))^5$$

ein Isomorphismus. Dabei sei p_i: $G\times G \longrightarrow G$ die Projektion auf den i-ten Faktor (für i = 1,2).

$$di: T_e G \longrightarrow T_e G,\ X \mapsto -X.$$

(ii) Die Differentiale der Abbildungen

$$q_1: X \longrightarrow X\times Y,\ \xi \mapsto (\xi,y),\text{ und } q_2: Y \longrightarrow X\times Y,\ \eta \mapsto (x,\eta),$$

in x bzw. y sind die k-linearen Abbildungen

$$dq_1: T_x X \longrightarrow T_x X \oplus T_y Y,\ D \mapsto (D,0),$$

und

$$dq_1: T_y Y \longrightarrow T_x X \oplus T_y Y,\ D \mapsto (0, D).$$

(iii) Das Differential der Diagonalabbildung

$$\Delta: X \longrightarrow X\times X,\ x \mapsto (x,y),$$

in x ist die k-lineare Abbildung

$$d\Delta_x: T_x X \longrightarrow T_x X \oplus T_x X,\ D \mapsto (D,D).$$

(iv) Seien u: $X \longrightarrow X'$ und v: $Y \longrightarrow Y'$ reguläre Abbildungen affiner Varietäten.

Dann ist das Differential von $u\times v$: $X\times Y \longrightarrow X'\times Y'$, $(x,y) \mapsto (u(x), v(y))$ im Punkt (x,y) die k-lineare Abbildung

$$d(u\times v)_{(x,y)}: T_x X \oplus T_y Y \longrightarrow T_{u(x)} X' \oplus T_{v(y)} Y',\ (D_1, D_2) \mapsto ((du)_x D_1, (dv)_y D_2).$$

Beweis.

Da der Tangentialraum in einem Punkt einer algebraischen Varietät übereinstimmt mit dem Tangentialraum einer jeden affinen Umgebung dieses Punktes, können wir bei Bedarf annehmen, daß die auftretenden Varietäten affin sind.

Zu (i).

Wir geben zwei Beweise an. Der erste verwendet wie in Aufgabe 1 die Beschreibung des Tangentialraum in 4.1.4. Der elegantere zweite Beweis benutzt die funktielle Abhängigkeit des Tangentialraum $T_x X$ vom Paar (x, X).

1.Beweis.

Es gilt

$$k[X\times Y] \qquad = k[X]\otimes_k k[Y]$$

Die (surjektiven) natürlichen Projektionen auf die beiden Faktoren

$$p_1: X\times Y \longrightarrow X \text{ und } p_2: X\times Y \longrightarrow Y$$

induzieren injektive k-Algebra-Homomorphismen

$$p_1^*: k[X] \hookrightarrow k[X\times Y],\ f \mapsto f\otimes 1,\text{ und } p_2^*: k[Y] \hookrightarrow k[X\times Y],\ f \mapsto 1\otimes f.$$

Wir betrachten k[X] und k[Y] als Teilringe von k[X×Y] bezüglich dieser Einbettungen. Es gilt

---

[5] Wir bezeichnen hier mit p_1: $X\times Y \longrightarrow X$ und p_2: $X\times Y \longrightarrow Y$ die natürlichen Projektionen auf die beiden Faktoren.

$$p_1^*(M_x) \subseteq M_{(x,y)} \text{ und } p_2^*(M_y) \subseteq M_{(x,y)}\,, \tag{1}$$

denn für jede reguläre Funktion f auf X, mit der Nullstelle x, ist $f \circ p_1$ eine reguläre Funktion auf X×Y mit der Nullstelle (x,y) und analog ist für jede reguläre Funktion g auf Y mit der Nullstelle y die Verpflanzung $g \circ p_2$ eine reguläre Funktion auf X×Y mit der Nullstelle (x,y). Weil $M_{(x,y)}$ ein Ideal von k[X×Y] ist, erhalten wir

$$(M_x \otimes 1)\bullet k[X\times Y] + (1\otimes M_y)\bullet k[X\times Y] \subseteq M_{(x,y)},$$

also

$$M_x \otimes k[Y] + k[X]\otimes M_y \subseteq M_{(x,y)}, \tag{2}$$

Nun ist aber das Ideal links ein maximales Ideal von k[X×Y], denn

$$\begin{aligned} k[X\times Y]/(M_x\otimes k[Y] + k[X]\otimes M_y) &\overset{6}{=} (k[X]/M_x)\otimes(k[Y]/M_y) \\ &= k\otimes_k k \\ &\cong k \end{aligned}$$

ist ein Körper. Deshalb gilt in (2) das Gleichheitszeichen.

Wir erhalten

$$M_{(x,y)}/M^2_{(x,y)} = M_x\otimes k[Y] + k[X]\otimes M_y\,/(M_x\otimes k[Y] + k[X]\otimes M_y)^2$$

$$= M_x\otimes k[Y] + k[X]\otimes M_y\,/(M_x^2\otimes k[Y] + M_x\otimes M_y + k[X]\otimes M_y^2)$$

$$\subseteq k[X]\otimes k[Y]/(M_x^2\otimes k[Y] + M_x\otimes M_y + k[X]\otimes M_y^2)$$

$$\cong (k[X]\otimes k[Y] \,/\, M_x^2\otimes k[Y]) \,/\, (M_x^2\otimes k[Y] + M_x\otimes M_y + k[X]\otimes M_y^2) \,/\, M_x^2\otimes k[Y])$$

$$\overset{7}{\cong} (k[X]/M_x^2)\otimes k[Y])/((M_x/M_x^2)\otimes M_y + (k[X]/M_x^2)\otimes M_y^2)$$

$$\cong (k[X]/M_x^2)\otimes k[Y] \,/\, (k[X]/M_x^2)\otimes M_y^2) \,/\, ((M_x/M_x^2)\otimes M_y + (k[X]/M_x^2)\otimes M_y^2)/(k[X]/M_x^2)\otimes M_y^2$$

$$\overset{8}{\cong} (k[X]/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y^2)/((M_x/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2)$$

Es folgt

$$M_{(x,y)}/M^2_{(x,y)} \cong (M_x/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y^2) + (k[X]/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2) \tag{3}$$

$$\subseteq (k[X]/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y^2)/((M_x/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2) \tag{4}$$

Dabei ist die Summe auf der rechten Seite von (3) direkt, denn der Durchschnitt der beilden Sumanden ist (nach A.1.16)

$$(M_x/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y^2) \cap (k[X]/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2) = (M_x/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2)$$

Nach (3) ist dieser Vektorraum gleich 0. Damit gilt

$$M_{(x,y)}/M^2_{(x,y)} \cong (M_x/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y^2) \oplus (k[X]/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2)$$

Dabei sind die beiden Tensorprodukte rechts als Teilmoduln von (4) anzusehen. Weil in (4) das Tensorprodukt

---

[6] Das Tensorprodukt ist rechtsexakt.

[7] ⊗ ist rechtsexakt.

[8] ⊗ ist rechtsexakt.

$$(M_x/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2)$$

gleich 0 gilt, können wir danach faktorisieren, ohne die Moduln zu verändern. Es gilt

$$(M_x/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y^2) = (M_x/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y) = (M_x/M_x^2)\otimes_k k$$

und

$$(k[X]/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2) = (k[X]/M_x)\otimes(M_y/M_y^2) = k\otimes_k (M_y/M_y^2)$$

also

$$M_{(x,y)}/M^2_{(x,y)} \cong (M_x/M_x^2)\otimes_k k \oplus k\otimes_k (M_y/M_y^2), \tag{5}$$

wobei die beiden Tensorprodukte nach wie vor wie Teilmoduln von (4) zu behandeln sind. Aus den natürlichen Einbettungen

$$k \hookrightarrow k[X]/M_x^2 \text{ und } k \hookrightarrow k[Y]/M_y^2$$

erhalten wir durch Anwenden der Funktoren $(M_x/M_x^2)\otimes_k$ bzw. $\otimes_k (M_y/M_y^2)$ injektive Abbildungen, welche die k-Vektorräume M_x/M_x^2 und M_y/M_y^2 mit den Teilmoduln von (4) auf der rechten Seite von (5) identifizieren. Damit bekommt die Isomorphie (5) die Gestalt

$$M_{(x,y)}/M^2_{(x,y)} \cong M_x/M_x^2 \oplus M_y/M_y^2.$$

Wir gehen zu den dualen Vektorräumen über und erhalten die Behauptung.
QED.

2.Beweis.
Die Zusammensetzungen

$$X \xrightarrow{q_1} X\times Y \xrightarrow{p_1} X$$

$$x' \mapsto (x',y),\ (x', y') \mapsto x',$$

und

$$Y \xrightarrow{q_2} X\times Y \xrightarrow{p_2} Y$$

$$y' \mapsto (x,y'),\ (x', y') \mapsto y',$$

sind identische Abbildungen. Dasselbe gilt also auch für deren Differentiale, d.h. es gilt

$$(dp_i)_{(x,y)}\circ(dq_i)_x = 1 \text{ für } i = 1,2.$$

Wir erhalten kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} T_xX \arrow[r, "dq_1"] \arrow[dr, "1"'] & T_{(x,y)}X\times Y \arrow[d, "(dp_1)_{(x,y)}"] \\ & T_xX \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} T_yY \arrow[r, "dq_2"] \arrow[dr, "1"'] & T_{(x,y)}X\times Y \arrow[d, "(dp_2)_{(x,y)}"] \\ & T_yY \end{tikzcd} \tag{1}$$

Weiter sind die beiden folgenden Abbilddungen konstant.

$$X \xrightarrow{q_1} X\times Y \xrightarrow{p_2} y$$

$$x' \mapsto (x',y),\ (x', y') \mapsto y',$$

und

$$Y \xrightarrow{q_2} X\times Y \xrightarrow{p_1} X$$

$$y' \mapsto (x,y'),\ (x', y') \mapsto x',$$

Die erste faktorisiert sich über $\{y\} \subseteq Y$, die zweite über $\{x\} \subseteq X$. Die Differentiale faktorisieren sich deshalb über den Tangentialraum der einpunktigen Varietät, d.h. über den trivialen Vektorraum, d.h. es gilt

$$(dp_{2-i})_{(x,y)} \circ (dq_i)_x = 0 \text{ für } i = 1,2.$$

Die Diagramme (1) bleiben deshalb kommutativ, wenn wir die Werte von $(dq_i)_x$ um Elemente aus dem Bild von $(dq_{2-i})_x$ abändern. Das bedeutet, die folgenden Diagramme sind kommutativ.

$$\begin{tikzcd} T_xX\oplus T_yY \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & T_{(x,y)}X\times Y \arrow[d, "(dp_1)_{(x,y)}"] \\ & T_xX \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} T_xX\oplus T_yY \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & T_{(x,y)}X\times Y \arrow[d, "(dp_2)_{(x,y)}"] \\ & T_yY \end{tikzcd} \qquad (2)$$

Dabei sei q die Abbildung

$$q: T_xX \oplus T_yY \longrightarrow T_{(x,y)}X\times Y,\ (v, w) \mapsto (dq_1)_x(v) + (dq_2)_y(v),$$

und π_i sei die Projektion auf den i-ten direkten Summanden. Sei r die Abbildung

$$r: T_{(x,y)}X\times Y \longrightarrow T_xX \oplus T_yY,\ w \mapsto ((dp_1)_{(x,y)}(w), (dp_2)_{(x,y)}(w)).$$

Auf Grund der Kommutativität der beiden Diagramme (2) gilt dann

$$\pi_i \circ r \circ q = (dp_i)_{(x,y)} \circ q = \pi_i \text{ für } i = 1,2.$$

Also ist

$$r \circ q = 1: T_xX \oplus T_yY \xrightarrow{q} T_{(x,y)}X\times Y \xrightarrow{r} T_xX \oplus T_yY$$

die identische Abbildung. Insbesonder gilt:

q ist injektiv und r ist surjektiv.

Es reicht zu zeigen, r ist injektiv. Sei

$$D \in \mathrm{Ker}(r).$$

Dann liegt D im Kern der beiden Koordinantenfunktionen von r, d.h. die Zusammensetzung von $D: k[X]\otimes k[Y] \longrightarrow k_{(x,y)}$ mit den beiden natürlichen Abbildungen

$$k[X] \longrightarrow k[X]\otimes k[Y],\ f \mapsto f\otimes 1, \text{ und } k[Y] \longrightarrow k[X]\otimes k[Y],\ g \mapsto 1\otimes g,$$

ist Null, d.h.

$$D(f\otimes 1) = 0 \text{ und } D(1\otimes g) = 0 \text{ für } f\in k[X] \text{ und } g\in k[Y].$$

Dann ist aber

$$\begin{aligned} D(f\otimes g) &= D((f\otimes 1)\cdot(1\otimes g)) \\ &= f(x)D(1\otimes g) + g(x)\cdot D(f\otimes 1) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

für $f \in k[X]$ und $g \in k[Y]$. Weil D eine k-lineare Abbildung ist, ist damit

$$D = 0 \text{ auf } k[X]\otimes k[Y].$$

Wir haben gezeigt, r ist auch injektiv, also ein Isomorphismus.

<u>Zu</u> (ii).
Es gilt

$$p_i \circ q_j = \begin{cases} \mathrm{id} & \text{für } i=j \\ c & \text{für } i\neq j \end{cases}$$

Dabei stehe c für eine constante reguläre Abbildung mit dem Wert $c \in \{x,y\}$, d.h. die induzierte Abbildung c^* der Koordinatenringe faktorisiert sich über k, d.h. für jede Tangentialvektor X und jede reguläre Funktion f gilt

$$((dc)(X))(f) = (X\circ c^*)(f) = X(c^*(f)) = X(f(c)) = 0.$$

d.h.

$$dc = 0.$$

Es folgt

$$dp_i \circ dq_j = \begin{cases} \text{id} & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Mit $D \in T_e X$ bzw. $D \in T_e Y$ gilt

$$\varphi(dq_1 D) = ((dp_1)(dq_1 D), (dp_2)(dq_1 D)) = (D, 0)$$

und

$$\varphi(dq_2 D) = ((dp_1)(dq_2 D), (dp_2)(dq_2 D)) = (0,D)$$

wie behauptet.

Zu (iii).
Für i = 1,2 gilt

$$p_i \circ \Delta = \text{id},$$

also

$$(dp_i)_{(x,x)} \circ d\Delta_x = \text{id},$$

also für $D \in T_x X$

$$\varphi((d\Delta_x)D) \quad = (dp_1((d\Delta)D), dp_2((d\Delta)D)) = (D,D),$$

wie behauptet.

Zu (iv).
Nach Definition von u×v gilt

$$p_1 \circ (u\times v) = u\circ p_1 \text{ und } p_2 \circ (u\times v) = u\circ p_2$$

also

$$dp_1 \circ d(u\times v) = du\circ dp_1 \text{ und } dp_2 \circ d(u\times v) = du\circ dp_2.$$

Wir bezeichnen die zu φ analoge Abbildung für X' und Y' mit

$$\varphi': T_{(u(x),v(y))} X'\times Y' \xrightarrow{\cong} T_x X' \oplus T_y Y'$$

Für $Z \in T_{(x,y)}(X\times Y)$ gilt dann

$$\begin{aligned}\varphi'(d(u\times v)(Z)) &= ((dp_1)(d(u\times v)(Z)), (dp_2)(d(u\times v)(Z))) \\ &= ((du)((dp_1)(Z)), (dv)((dp_2)(Z)) \\ &= (du\times dv)((dp_1)(Z), (dp_2)(Z)) \\ &= (du\times dv)(\varphi(Z)).\end{aligned}$$

Mit $\varphi(Z) = (X,Y) \in T_x X \oplus T_y Y$ gilt dann

$$\varphi'\circ(d(u\times v)\circ\varphi^{-1}) (X,Y) = (du\times dv)(X,Y) = ((du)X, (dv)Y)$$

wie behauptet.
QED.

4.1.9 Aufgabe 3: Dualzahlen *60*

Seien X eine affine algebraische Varietät, $x \in X$ ein Punkt und

$$k[\tau] = k[T]/(T^2)$$

die k-Algebra der Dualzahlen (τ bezeichne die Restklasse von T). Zeigen Sie, es gibt einen k-linearen Isomorphismus

$$T_x \longrightarrow \{ \phi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}} (k[X], k[\tau]) \mid \phi(f) - f(x) \in k\cdot\tau \text{ für } f\in k[X] \}$$

Die Elemente der Menge rechts heißen <u>k[τ]-wertige Punkte</u> von X über dem Punkt x.

Beweis. Wir verwenden für die Menge auf der rechten Seite die Bezeichnung

$$\mathrm{DHom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k[\tau])$$

Durch direktes Nachrechnen sieht man, daß mit je zwei Elementen aus dieser Menge auch deren Summe in dieser Menge liegt und mit jedem Element auch dessen k-Vielfache. Mit anderne Worten,

$$\mathrm{DHom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k[\tau]) \text{ ist k-linearer Unterraum von } \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k[\tau])$$

Für jeden k-Algebra-Homomorphismus aus dieser Menge, sagen wir

$$\phi\colon k[X] \longrightarrow k[\tau] = k + k\cdot\tau,$$

sei $D_\phi f$ das eindeutig bestimmte Element aus k mit

$$\phi(f) = f(x) + D_\phi f\cdot\tau.$$

Weil ϕ als k-Algebra-Homomorphismus linear ist, ist auf diese Weise eine k-lineare Abbildung

$$D_\phi\colon k[X] \longrightarrow k$$

definiert. Weilter gilt für $f, g \in k[X]$

$$\begin{aligned}
\phi(f\cdot g) &= \phi(f)\cdot\phi(g) \\
&= (f(x)+ D_\phi(f)\cdot\tau)\cdot(g(x)+D_\phi(g)\cdot\tau) && \text{(Definition von } D_\phi\text{)} \\
&= f(x)\cdot g(x) + (f(x)\cdot D_\phi(g)+g(x)\cdot D_\phi(f))\cdot\tau) && \text{(wegen } \tau^2 = 0\text{)}
\end{aligned}$$

also - weil 1 und τ linear unabhängig über k sind -

$$D_\phi(f\cdot g) = f(x)\cdot D_\phi(g)+g(x)\cdot D_\phi(f).$$

Wir haben gezeigt, D_ϕ ist eine k-Derivation mit Werten in k_x, d.h. die Abbildung

$$\mathrm{DHom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k[\tau]) \longrightarrow T_xX,\ \phi \mapsto D_\phi, \tag{1}$$

ist wohldefiniert. Direkt an der Definition von D_ϕ liest man ab, daß die Abbildung k-linear ist. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß sie bijektiv ist. Zeigen wir, es gibt eine Umkehrabbildung. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$T_xX \longrightarrow \mathrm{DHom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k[\tau]),\ v \mapsto (f \mapsto f(x)+v(f)\cdot\tau). \tag{2}$$

<u>Die Abbildung</u> (2) <u>ist wohldefiniert</u>.

Wir haben zu zeigen, für jeden Tangentialvektor $v\colon k[X] \longrightarrow k_x$ liegt die Abbildung

$$\alpha_v\colon k[X] \longrightarrow k[\tau]),\ f \mapsto f \mapsto f(x)+v(f)\cdot\tau,$$

in $\mathrm{DHom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k[\tau])$. Für $f, g \in k[X]$ gilt

$\alpha_v(f\bullet g) \quad = f(x)\bullet g(x) + v(f\bullet g)\bullet\tau \qquad$ (Definition von α_v)

$= f(x)\bullet g(x) + f(x)\bullet v(g)\bullet\tau + g(x)\bullet v(f)\bullet\tau$ (v ist eine Derivation mit Wertn in k_x)

$= (f(x)+v(x)\bullet\tau)\bullet(g(x)+v(x)\bullet\tau) \qquad$ (wegen $\tau^2 = 0$)

$= \alpha_v(f)\bullet \alpha_v(f)$

Damit ist α_v ein Ring-Homomorphismus. Außerdem ist für $f,g \in k[X]$ und $c\in k$:

$\alpha_v(f+c\bullet g) \quad = f(x)+c\bullet g(x) + v(f+c\bullet g)\bullet\tau \qquad$ (Definition von α_v)

$= f(x) + c\bullet g(x) + v(f)\bullet\tau + c\bullet v(g)\bullet\tau \qquad$ (v ist k-linear)

$= (f(x)+v(f)\bullet\tau) + c\bullet(g(x) + v(g)\bullet\tau)$

$= \alpha_v(f) + c\bullet \alpha_v(g).$

Damit ist α_v ein k-linearer Ring-Homomorphismus, also ein Homomorphismus von k-Algebren. Nach Definition gilt für jedes $f \in k[X]$

$$\alpha_v(f) - f(x) \quad = v(f)\bullet\tau \in k\bullet\tau,$$

d.h. α_v liegt in $\mathrm{DHom}_{k\text{-}Alg}(k[X], k[\tau])$.
<u>Die Abbildung</u> (2) <u>ist invers zu</u> (1).
Für jeden Tangentialvektor $v: k[X] \longrightarrow k_x$ und jedes $f \in k[X]$ gilt

$D_{\alpha_v}(f)\bullet\tau \quad = \alpha_v(f) - f(x) \qquad$ (Definition von D_ϕ)

$= (f(x) + v(f)\bullet\tau) - f(x)$ (Definiton von α_v)

$= v(f)\bullet\tau.$

also $D_{\alpha_v}(f) = v(f)$. Weil dies für jedes f gilt, folgt

$$D_{\alpha_v} = v \text{ für jedes } v \in T_xX \tag{3}$$

Weiter gilt für jedes $\phi\in \mathrm{DHom}_{k\text{-}Alg}(k[X], k[\tau])$ und jedes $f \in k[X]$

$\alpha_{D_\phi}(f) \quad = f(x) + D_\phi(f)\bullet\tau \qquad$ (Definition von α_v)

$= f(x) + (\phi(f) - f(x)) \quad$ (Definition von D_ϕ)

$= \phi(f).$

Weil dies für jedes $f \in k[X]$ gilt, folgt

$$\alpha_{D_\phi} = \phi \text{ für jedes } \phi\in \mathrm{DHom}_{k\text{-}Alg}(k[X], k[\tau]). \tag{4}$$

Zusammen bedeuten (3) und (4), daß die Abibldungen (1) und (2) zueinander invers sind. Insbesondere ist (2) ein k-linearer Isomorphismus.
QED.

4.1.9 Aufgabe 4: abgeschlossene Einbettungen 60

Seien Y eine algebraische Varietät, $X \subseteq Y$ eine abgeschlossene Teilvarietät und

$$\phi: X \hookrightarrow Y$$

die natürliche Einbettung. Dann ist

$$d\phi_x: T_x X \longrightarrow T_{\phi(x)}Y$$

injektiv für jeden Punkt $x \in X$.

Beweis. Die natürliche Einbettung ϕ induziert eine natürliche Surjektion der Koordinatenringe

$$\phi^*: k[Y] \twoheadrightarrow k[X], f \mapsto f|_X.$$

Die Verpflanzung entlang ϕ^*,

$$d\phi_x: \mathrm{Der}_k(k[X], k_x) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[Y], k_{\phi(x)}), D \mapsto D\circ(\phi^*).$$

ist deshalb injektiv, d.h. es gilt die Behauptung.
QED.

4.1.9 Aufgabe 5: Beweise zu 4.1.8 *60*

Geben Sie die in 4.1.8 fehlenden Details an.
Beweis. Diese sind (hoffentlich ausreichend) im Beweis von 4.1.8 angegeben.
QED.

4.1.10 Ergänzung: Das Differential linearer Abbildungen

Seien $V \subseteq k^m$ und $W \subset k^n$ zwei affine Teilvarietäten des k^m bzw. k^n, ℓ eine Abbildung der Gestalt

$$\ell: k^m \longrightarrow k^n, x \mapsto Ax + b,$$

mit einer $n\times m$-Matrix

$$A = (a_{ij}) \in M_{n,m}(k)$$

mit Einträgen aus k und einem (Spalten-)Vektor

$$b = (b_i) \in k^n,$$

welche die Teilvarietät V in die Teilvarietät W abbildet,

$$\ell(V) \subseteq W,$$

und $x \in V$, $y \in W$ zwei Punkte mit

$$y = \ell(x).$$

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k^m & \xrightarrow{\ell} & k^n \\ i\uparrow & & j\uparrow \\ V & \xrightarrow{\ell|_V} & W \end{array}$$

dessen vertikale Abbildungen die natürlichen Einbettungen sind, erhalten wir durch Übergang zu den Differentialen in x bzw. y ein kommutatives Diagramm von k-linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} T_x k^m & \xrightarrow{d\ell} & T_y k^n \\ di\uparrow & & dj\uparrow \\ T_x V & \xrightarrow{d(\ell|_V)} & T_y W \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm. Nach 4.1.9 Aufgabe 4 sind die vertikalen Abbildungen injektiv. Wir können die Tangentialräume der unteren Zeile mit deren Bildern in den

Tangentialräumen der oberen Zeile identifizieren und so die vertikalen Abbildungen als natürliche Einbettungen betrachten, sodaß

$$d(\ell|_V) = (d\ell)|_{T_x V}$$

gilt. Nach 4.1.9 Aufgabe 1 (ii) bilden die Derivationen

$$\frac{\partial}{\partial T_1}|_x , \dots , \frac{\partial}{\partial T_m}|_x \in T_x k^m \text{ bzw.}$$

$$\frac{\partial}{\partial T_1}|_y , \dots , \frac{\partial}{\partial T_n}|_y \in T_y k^n$$

Basen von $T_x k^m$ bzw. $T_y k^n$. Bezüglich dieser Basen ist die Matrix der linearen Abbildung $d\ell$ gleich A, d.h. es gilt

$$d = Ac,$$

für die Koordinatenvektoren

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix} \text{ und } d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$$

von Punkten

$$v = \sum_{i=1}^{m} c_i \bullet \frac{\partial}{\partial T_i}|_x \in T_x k^m$$

und

$$w = \sum_{j=1}^{m} d_j \bullet \frac{\partial}{\partial T_j}|_y \in T_y k^n$$

mit

$$w = (d\ell)(v).$$

Beweis. Wir bezeichnen mit

$$T_i: k^m \longrightarrow k \text{ bzw. } T_i: k^n \longrightarrow k$$

die i-ten Koordinatenfunktionen von k^m bzw. k^n. Nach Definition des Differntials im Punkt x gilt

$$\begin{aligned}
d\ell \left(\frac{\partial}{\partial T_j}|_x\right)(T_i) &= \left(\frac{\partial}{\partial T_j}|_x\right)(\ell^*(T_i)) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial T_j}|_x\right)(T_i \circ \ell) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial T_j}|_x\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} \bullet T_\alpha + b_i\right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} \bullet \frac{\partial T_\alpha}{\partial T_j}|_x \\
&= a_{ij} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial T_i}{\partial T_\alpha}|_y \bullet a_{\alpha j}
\end{aligned}$$

$$= \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial T_\alpha}\Big|_y \cdot a_{\alpha j}\Big)(T_i)$$

Nach Bemerkung 4.1.3 (iv) folgt

$$d\ell\Big(\frac{\partial}{\partial T_j}\Big|_x\Big) = \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial T_\alpha}\Big|_y \cdot a_{\alpha j}\Big)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} d_j \cdot \frac{\partial}{\partial T_j}\Big|_y \quad &= w \\
w \quad &= (d\ell)(v) \\
&= d\ell\Big(\sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\partial}{\partial T_j}\Big|_x\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial T_\alpha}\Big|_y \cdot a_{\alpha j} \cdot c_j) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{\alpha j} \cdot c_j\Big) \frac{\partial}{\partial T_\alpha}\Big|_y
\end{aligned}$$

Weil die $\frac{\partial}{\partial T_j}\Big|_y$ linear unabhängig sind, folgt

$$d_\alpha = \sum_{j=1}^{m} a_{\alpha j} \cdot c_j$$

also

$$d = A \cdot c.$$

QED.

4.2 Differentiale und Separabilität 60

Wir werden einige Eigenschaften von Derivationen brauchen, insbesondere von Derivationen auf Körpern. Dazu führen wir Differentiale ein.

4.2.1 Das Differential d: $A \longrightarrow \Omega_{A/R}$ 60

Seien R ein kommutativer Ring mit Eins und A eine kommutative R-Algebra. Wir bezeichnen mit m die Abbildung

$$m: A \otimes_R A \longrightarrow A,\ a \otimes b \mapsto a \cdot b,$$

welche durch die über R bilineare Abbildung $A \times A \longrightarrow A$, $(a,b) \mapsto a \cdot b$, induziert wird, und setzen

$$I := \mathrm{Ker}(m).$$

Dies ist ein Ideal der R-Algebra $A \otimes_R A$, welches von den Elementen der Gestalt

$$a \otimes 1 - 1 \otimes a \text{ mit } a \in A$$

erzeugt wird[9],

[9] Sei $J := (a \otimes 1 - 1 \otimes a \mid a \in A) \cdot A$ das von den Elementen dieser Gestalt erzeugte Ideal. Trivialerweise liegt $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ im Kern von m für jedes $a \in A$. Deshalb gilt

$$I = (a\otimes 1 - 1\otimes a \mid a \in A)\bullet A. \qquad (1)$$

Weil m surjektiv ist, gilt nach dem Homomorphiesatz

$$(A\otimes_R A)/I \cong \mathrm{Im}(m) = A,\ a\otimes a' \bmod I \mapsto m(a\otimes a') = a\bullet a'.$$

Der <u>Modul der Differentiale</u> von A über R ist definiert als der $A\otimes_R A$-Modul

$$\Omega_{A/R} := I/I^2.$$

Die Abbildung

$$d = d_{A/R}: A \longrightarrow \Omega_{A/R},\ a \mapsto a\otimes 1 - 1\otimes a \bmod I^2 \qquad (2)$$

heißt <u>natürliches Differential</u> von A über R. Außerdem heißt auch für jedes $a \in A$ dessen Bild bei d,

$$da = d_{A/R}(a)$$

<u>Differential</u> von a (über R).

Bemerkungen

(i) Weil $\Omega_{A/R}$ vom Ideal I annulliert wird, ist $\Omega_{A/R}$ auch ein Modul über

$$(A\otimes_R A)/I \cong A.$$

Die Multiplikation eines Elements $\omega \in \Omega_{A/R}$ mit einem $a \in A$ ist dabei definiert als das Produkt

$$a\bullet\omega := \alpha\bullet\omega.$$

mit einem beliebigen Element

$$\alpha \in A\otimes_R A \text{ mit } m(\alpha) = a.$$

Zum Beispiel ist

$$J \subseteq I.$$

Wir haben die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei

$$\sum_i a_i\otimes b_i \in \mathrm{Ker}(m).$$

Wegen

$$\begin{aligned}\sum_i a_i\otimes b_i &= \sum_i (a_i\otimes 1)\bullet(1\otimes b_i \\ &\equiv \sum_i (a_i\otimes 1)\bullet(b_i\otimes 1) \bmod J \\ &= (\sum_i a_i b_i)\otimes 1\end{aligned}$$

Liegt auch $(\sum_i a_i b_i)\otimes 1$ im Kern von m, d.h. es ist $\sum_i a_i b_i = 0$, also $(\sum_i a_i b_i)\otimes 1 = 0$, also

$$\sum_i a_i\otimes b_i \equiv 0 \bmod J,$$

also $\sum_i a_i\otimes b_i \in J$.s

$$a\bullet\omega = (a\otimes 1)\bullet\omega = (1\otimes a)\bullet\omega.$$

(ii) Die Abbildung (2) ist eine R-Derivation $A \longrightarrow \Omega_{A/R}$: Für $r\in R$ gilt trivialerweise

$$d(r\bullet 1) = (r\bullet 1)\otimes 1 - 1\otimes(r\bullet 1) \bmod I = 0$$

(wegen (1)). Für $a, b \in A$ ist außerdem

$$\begin{aligned} d(a\bullet b) &= (a\bullet b)\otimes 1 - 1\otimes(a\bullet b) \bmod I \\ &= (a\otimes 1)\bullet(b\otimes 1 - 1\otimes b) + (a\otimes 1 - 1\otimes a)\bullet(1\otimes b) = \bmod I \\ &= (a\otimes 1)\bullet db + da\bullet(1\otimes b) \\ &= a\bullet db + b\bullet da \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen besteht auf Grund der Definition der A-Modul-Struktur von $\Omega_{A/R}$. Wir haben gezeigt, $d_{A/R}$ ist eine R-Derivation.

(iii) Weil das Ideal I von den Elementen $a\otimes 1-1\otimes a$ mit $a\in A$ erzeugt wird, wird der A-Modul

$$\Omega_{A/R} = I/I^2$$

von den Elementen $da = a\otimes 1-1\otimes a \bmod I^2$ mit $a \in A$ erzeugt.

(iv) Ist $\{x_i\}_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem der R-Algebra A,

$$A = R[x_i \mid i \in I],$$

dann wird $\Omega_{A/R}$ von den dx_i als A-Modul erzeugt,

$$\Omega_{A/R} = \sum_{i\in I} A\bullet dx_i \tag{3}$$

denn jedes $a \in A$ ist ein Polynom in endlich vielen der x_i mit Koeffizienten aus R, sagen wir

$$a = f(x_{i_1},\dots,x_{i_r}) \text{ mit } f \in R[T_1,\dots,T_r].$$

Weil $d: A \longrightarrow \Omega_{A/R}$ eine R-Derivation ist, ist jedes Potenzprodukt der $x_{i_1},\dots,x_{i_r}$ eine A-Linearkombination der $dx_{i_1},\dots,dx_{i_r}$, liegt also in der rechten Seite von (3) und weil d linear ist über R, liegt auch da in dieser rechten Seite. Damit liegt das Erzeugendensystem der da des R-Moduls in der rechten Seite von (3) und die linke Seite von (3) liegt in der rechten. Die umgekehrte Inklusion besteht trivialerweise.

(v) Der nachfolgende Satz charakterisiert $d_{A/R}$ durch eine Universalitätseigenschaft.

4.2.2 Satz: Die Universalitätseigenschaft 61

Seien R ein kommutativer Ring mit Eins und A eine kommutative R-Algebra. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

(i) $\Omega_{A/R}$ ist ein R-Modul und $d_{A/R}: A \longrightarrow \Omega_{A/R}$ eine R-Derivation.

(ii) Jede R-Derivation $D:A \longrightarrow M$ (mit Werten in einem R-Modul M) faktorisiert sich auf genau eine Weise über $d = d_{A/R}$, d.h. es gibt genau eine A-lineare Abbildung

$$\tilde{D}:\Omega_{A/R} \longrightarrow M,$$

für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{D} & M \\ d\downarrow & \nearrow \widetilde{D} & \\ \Omega_{A/R} & & \end{array}$$

kommutativ ist.

Bemerkungen

(i) Die beiden Aussagen des Satzes bedeuten gerade, daß die A-lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_R(A, M), \widetilde{D} \mapsto \widetilde{D}\circ d,$$

wohldefiniert und bijektiv ist für jeden R-Modul M, d.h. $\Omega_{A/R}$ ist zusammen mit d ein darstellendes Objekt für den Funktor

$$A\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod}, M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M).$$

(ii) Ein Paar $(\Omega_{A/R}, d)$ bestehend aus einem R-Modul $\Omega_{A/R}$ und einer R-Derivation

$$d: A \longrightarrow \Omega_{A/R}$$

ist durch die beiden Bedingungen des Satzes bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Aussage (i) des Satzes wurde bereits bewiesen (vgl. Bemerkung 4.2.1 (ii)). Beweisen wir Aussage (ii).

Eindeutigkeit von $\widetilde{D}$. Weil das Ideal I von den Elementen der Gestalt

$$a\otimes 1 - 1\otimes A \text{ mit } a \in A$$

erzeugt wird, liegt im Bild von $d = d_{A/R}$ ein Erzeugendensystem des A-Moduls $\Omega_{A/R}$. Jede auf $\Omega_{A/R}$ definierte A-lineare Abbildung ist durch ihre Werte auf diesen Erzeugern eindeutig festgelegt, d.h. $\widetilde{D}$ ist durch die Kommutativität des Diagramms eindeutig bestimmt.

Existenz von $\widetilde{D}$. Seien M ein R-Modul und

$$D: A \longrightarrow M$$

eine R-Derivation. Wir betrachten die Abbildung

$$A\times A \longrightarrow M, (a, b) \mapsto b\bullet Da.$$

Diese Abbildung ist bilinear über R, induziert also eine R-lineare Abbildung

$$D': A\otimes_R A \longrightarrow M, a\otimes b \mapsto b\bullet Da.$$

Für $a \in A$ gilt

$$\begin{aligned} D'(a\otimes 1-1\otimes a) &= D'(a\otimes 1) - D'(1\otimes a) \\ &= 1\bullet D(a) - a\bullet D(1) \\ &= D(a), \end{aligned}$$

d.h.

$$D'(\Delta a) = D(a) \text{ für } a \in A \text{ und } \Delta a = a\otimes 1-1\otimes a. \tag{1}$$

Für $a, b, c, d \in A$ folgt

$$\begin{aligned} D'((c\otimes d)\bullet\Delta a\bullet\Delta b) &= D'((c\otimes d)\bullet(a\otimes 1-1\otimes a)\bullet(b\otimes 1-1\otimes b)) \\ &= D'((c\otimes d)\bullet((ab)\otimes 1 - a\otimes b - b\otimes a + 1\otimes(ab))) \\ &= D'((abc)\otimes d - (ac)\otimes(bd) - (bc)\otimes(ad) + c\otimes(abd)) \\ &= d\bullet D(abc) - (bd)\bullet D(ac) - (ad)\bullet D(bc) + (abd)\bullet D(c) \end{aligned}$$

$$= bcd\cdot D(a) + acd\cdot D(b) + abd\cdot d(c)$$
$$-bcd\cdot D(a) - abd\cdot D(c) - acd\cdot D(b) - abd\cdot D(c)$$
$$+ abd\cdot D(c)$$
$$= 0$$

Weil D' additiv ist, folgt $D'(I^2) = 0$, d.h. D' induziert eine R-lineare Abbildung

$$A\otimes_R A/I^2 \longrightarrow M.$$

Die Einschränkung auf $I/I^2 \subseteq A\otimes_R A/I^2$ bezeichnen wir mit

$$\tilde{D}: \Omega_{A/R} \longrightarrow M,\ (a\otimes b)\cdot\Delta c \bmod I^2 \mapsto D'((a\otimes b)\cdot\Delta c).$$

Wegen

$$\begin{aligned} D'((a\otimes b)\cdot\Delta c) &= D'(ac\otimes b - a\otimes bc) \\ &= b\cdot D(ac) - bc\cdot D(a) \\ &= ab\cdot D(c) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} D'(a\cdot(a'\otimes b')\cdot\Delta c) &= D'(((aa')\otimes b')\cdot\Delta c) \\ &= (aa'b')\cdot D(c) \\ &= a\cdot D'((a'\otimes b')\cdot\Delta c) \end{aligned}$$

also

$$\tilde{D}(a\cdot(a'\otimes b')\cdot dc) = a\cdot \tilde{D}((a'\otimes b')\cdot dc).$$

Da beide Seiten additiv bezüglich $(a'\otimes b')\cdot dc$ sind, folgt

$$\tilde{D}(a\cdot x) = a\cdot\tilde{D}(x) \text{ für } a \in A \text{ und } x \in I/I^2 = \Omega_{A/R}.$$

Mit anderen Worten, $\tilde{D}: \Omega_{A/R} \longrightarrow M$ ist A-linear. Für $c \in A$ gilt weiter

$$\begin{aligned} \tilde{D}(dc) &= \tilde{D}(\Delta c \bmod I^2) \\ &= D'(\Delta c) \\ &= D(c) \qquad \text{(nach (1))} \end{aligned}$$

Das Diagramm von Aussage (ii) ist kommutativ.
QED.

4.2.3 Funktorialität **61**

Seien R ein kommutativer Ring mit Eins und $\phi: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von (kommutativen) R-Algebren. Auf Grund der Universalitätseingenschaft gibt es genau eine A-lineare Abbildung

$$\phi^0:\Omega_{A/R} \longrightarrow \Omega_{B/R},\ d_{A/R}(a) \mapsto d_{B/R}(\phi(a))$$

für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ {\scriptstyle d_{A/R}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_{B/R}} \\ \Omega_{A/R} & \xrightarrow{\phi^0} & \Omega_{B/R} \end{array} \qquad (1)$$

kommutativ ist (weil $d_{B/R}\circ\phi$ eine R-Derivation ist).

Ist A = B und ϕ die identische Abbildung, so gilt

$$\phi^0 = \mathrm{Id}: \Omega_{A/R} \longrightarrow \Omega_{A/R}.$$

Für je zwei Homomorphismen von R-Algebren $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C$ gilt

$$(\psi\circ\phi)^0 = \psi^0\circ\phi^0.$$

Weil $\Omega_{B/R}$ ein B-Modul ist, induziert die untere Zeile des Diagramms eine B-lineare Abbildung

$$\Omega_{A/R}\otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/R}$$

Durch Anwenden des Funktors $\mathrm{Hom}_B(?, N)$ erhalten wir für jeden B-Modul N ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/R},N) & \xrightarrow{\circ\phi^0} & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R},N) \\
{\scriptstyle\circ d_{B/R}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\circ d_{A/R}} \\
\mathrm{Der}_R(B,N) & \xrightarrow{\circ\phi} & \mathrm{Der}_R(A,N)
\end{array}$$

dessen vertikale Abbildungen Isomorphismen sind (nach Bemerkung 4.2.2 (i)). Die Kommutativität des Vierecks ergibt sich aus der von (1). Insbesondere sind die vertikalen Isomorphismen funktoriell bezüglich N.

Bemerkung

Seien zwei Homomorphismen von (kommutativen) Ringen mit 1 gegeben mit demselben Definitionsbereich, sagen wir

$$B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C.$$

Wir setzen

$$B' := B\otimes_A C$$

Dann besteht ein natürlicher Isomorphismus

$$\Omega_{B/A}\otimes_A C \xrightarrow{\cong} \Omega_{B'/C}\,,\ d_{B/A}(f)\otimes c \mapsto d_{B'/C}(f\otimes c).$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, die C-lineare Abbildung

$$\varphi := d_{B/A}\otimes\mathrm{id}\colon B\otimes_A C \longrightarrow \Omega_{B/A}\otimes_A C,\ b\otimes c \mapsto d_{B/A}(b)\otimes c, \qquad (1)$$

besitzt die Universalitätseigenschaft der Abbildung

$$d_{B'/C}\colon B' \longrightarrow \Omega_{B'/C}\,.$$

φ <u>ist eine</u> C-<u>Derivation</u>:

Für $b', b'' \in B$ und $c', c'' \in C$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi((b'\otimes c')\bullet(b''\otimes c'') &= \varphi((b'b'')\otimes(c'c'')) \\
&= d(b'b'')\otimes(c'c'') \\
&= (b'db'' + b''db')\otimes(c'c'') \\
&= (b'\otimes c')\bullet(db''\otimes c'') + (b''\otimes c'')\bullet(db'\otimes c') \\
&= (b'\otimes c')\bullet\varphi(c''\otimes b'') + (b''\otimes c'')\bullet\varphi(c'\otimes b').
\end{aligned}$$

φ <u>ist universell</u>.

Seien M ein B'-Modul und

$$D\colon B\otimes_A C \longrightarrow M$$

eine C-Derivation. Wir haben zu zeigen, D faktorisiert sich eindeutig über φ. Die Zusammensetzung

$$B \xrightarrow{\alpha} B\otimes_A C \xrightarrow{D} M$$

von D mit dem Ring-Homomorphismus $B \xrightarrow{\alpha} B\otimes_A C$, $b \mapsto b\otimes 1$, ist eine A-Derivation, faktorisiert sich also über $d_{B/A}: B \longrightarrow \Omega_{B/A}$, d.h. es gibt eine B-lineare Abbildung

$$\tilde{D}: \Omega_{B/A} \longrightarrow M$$

mit

$$D\circ\alpha = \tilde{D}\circ d_{B/A}.$$

Weil M als B'-Modul auch ein C-Modul ist, induziert $\tilde{D}$ eine B'-lineare Abbildung

$$\tilde{\tilde{D}}: \Omega_{B/A}\otimes_A C \longrightarrow M,\ \omega\otimes c \mapsto c\bullet \tilde{D}(\omega).$$

Für $b \in B$ und $c \in C$ gilt

$\tilde{\tilde{D}}(\varphi(b\otimes c))$	$= \tilde{\tilde{D}}(d_{B/A}(b)\otimes c))$	(Definition von φ)
	$= c\bullet \tilde{D}(d_{B/A}(b))$	(Definition von $\tilde{\tilde{D}}$)
	$= c\bullet D(\alpha(b))$	(Wahl von $\tilde{D}$)
	$= c\bullet D(b\otimes 1)$	(Definition von α)
	$= D(b\otimes c)$	(D ist C-linear)

Damit git

$$D \quad = \tilde{\tilde{D}}\circ\varphi. \qquad (2)$$

Wir haben noch zu zeigen, $\tilde{\tilde{D}}$ ist durch (2) eindeutig bestimmt. Weil die

$$d_{B/A}(b) \text{ mit } b \in B$$

den B-Modul $\Omega_{B/A}$ erzeugen, erzeugen die

$$\varphi(b\otimes c) := d_{B/A}(b)\otimes c \text{ mit } b \in B \text{ und } c \in C$$

den $B' = B\otimes_A C$-Modul

$$\Omega_{B/A}\otimes_A C$$

, d.h. Im(φ) enthält ein Erzeugendensystem dieses B'-Moduls. Weil die Abbildung $\tilde{\tilde{D}}$ linear ist über B', ist sie durch ihre Werte auf diesem Erzeugendensystem eindeutig bestimmt.
QED.

4.2.4 Der Fall endlich erzeugter R-Algebren 61

Seien R ein kommutativer Ring mit Eins und A eine R-Algebra der Gestalt

$$A := R[T_1,...,T_m]/(f_1,...,f_n).$$

Weiter seien t_i die Restklasse der Unbestimmten T_i in A,

$$t := (t_1,...,t_m)$$

und

$$D_i: R[T_1,...,T_m] \longrightarrow R[T_1,...,T_m]$$

die partielle Ableitung nach T_i (für i = 1,...,m). Wir betrachten die A-lineare Abbildung

$$\phi: A^m \longrightarrow \Omega_{A/R}, e_i \mapsto dt_i,$$

welche den i-ten Standard-Einheitsvektor e_i in das Differential dt_i von t_i abbildet. Die Abbildung ϕ ist surjektiv und besitzt den Kern

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \sum_{j=1}^{n} A\bullet(\sum_{i=1}^{m} (D_i f_j)(t)\bullet e_i),$$

induziert also einen Isomorphismus

$$\Omega_{A/R} \xrightarrow{\cong} A^m/\mathrm{Ker}(\phi), dt_i \mapsto e_i \bmod \mathrm{Ker}(\phi).$$

Beweis. Sei

$$K \subseteq A^m$$

der von den

$$\sum_{i=1}^{m} (D_i f_j)(t)\bullet e_i \in A^m, j = 1,...,m$$

erzeugte Teilmodul. Wir betrachten die Abbildung

$$R[T_1,...,T_m] \longrightarrow A^m/K, f \mapsto \sum_{i=1}^{m} (D_i f)(t)\bullet e_i \bmod K. \tag{1}$$

Die Abbildungen D_i Derivationen über R. Die natürliche Abbildung $A^m \longrightarrow A^m/K$ auf den Faktor-Modul ist A-linear. Deshalb ist die Abbildung (1) eine R-Derivation. Ihr Wert in den Polynomen f_j ist nach Definition von K gleich Null. Weil die f_j den Modul A^m/K annullieren, liegt das gesamte Ideal I im Kern von (1). Deshalb induziert (1) eine R-lineare Abbildung

$$A \longrightarrow A^m/K, f(t) \mapsto \sum_{i=1}^{m} (D_i f)(t)\bullet e_i \bmod K. \tag{2}$$

Mit (1) ist auch (2) eine R-Derivation. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, die Derivation (2) besitzt die Universalitätseigenschaft 4.2.2 von $d: A \longrightarrow \Omega_{A/R}$.

Seien M ein A-Modul und $D: A \longrightarrow M$ eine R-Derivation. Nach der Kettenregel (für Polynome) gilt dann für jedes $f \in R[T_1,...,T_m]$

$$D(f(t)) = \sum_{i=1}^{m} (D_i f)(t)\bullet D(t_i).$$

Wegen $f_j(t) = 0$ in A gilt insbesondere

$$0 = D(f_j(t)) = \sum_{i=1}^{m} (D_i f_j)(t)\bullet D(t_i) \text{ für } j = 1,...,m,$$

d.h. für jedes j liegt

$$\sum_{i=1}^{m} (D_i f_j)(t)\bullet e_i \in A^m$$

im Kern der A-linearen Abbilduing

$$A^m \longrightarrow M, e_i \mapsto D(t_i).$$

Die Abbildung induziert also eine A-lineare Abbildung

$$A^m/K \longrightarrow M,\ e_i \bmod K \mapsto D(t_i). \qquad (3)$$

Die Zusammensetzung von (2) und (3) hat die Gestalt

$$f(t) \mapsto \sum_{i=1}^{m} (D_i f)(t)\cdot e_i \bmod K \mapsto \sum_{i=1}^{m} (D_i f)(t)\cdot D(t_i) = D(f(t)).$$

Die vorgegebene Derivation D faktorisiert sich über (2). Wir haben noch die Eindeutigkeit der Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "(2)"'] \arrow[dr, "D"] & \\ A^m/K \arrow[rr, "(3)"] & & M \end{tikzcd}$$

zu beweisen. Dazu reicht es zu zeigen, das Bild von (2) enthält eine Erzeugendensystem des A-Moduls A^m/K. Nun ist das Bild der Restklasse t_i von T_i bei (2) gleich e_i mod K. Weil die e_i den A-Modul A^m erzeugen, erzeugen deren Restklassen modulo K den A-Modul A^m/K.
QED.

4.2.5 Aufgaben zum Differentialmodul 62

4.2.5 Aufgabe 1: Polynom-Algebren 63

Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und

$$A = R[T_1,\dots,T_m]$$

die Polynom-Algebra über R in den Unbestimmten T_i. Dann ist

$$\Omega_{A/R}$$

ein freiner A-Modul vom Rang m mit der Basis

$$dT_i\ ,\ i = 1,\dots,m.$$

Beweis. Wir wenden 4.2.4 mit n = 0 an und erhalten K = 0 und damit den Isomorphismus

$$A^m \longrightarrow \Omega_{A/R}\ ,\ e_i \mapsto dt_i.$$

QED.

4.2.5 Aufgabe 2: Einfache Erweiterungen 63

Geben sie ein notwendige und hinreichende Bedingung an f_1 dafür an, daß in 4.2.4 mit m = n = 1, d.h. für

$$A = R[T_1]/(f_1)$$

der Differentialmodul

$$\Omega_{A/R}$$

gleich Null ist. Betrachten Sie den Fall, daß R ein Körper ist.
Beweis. Nach 4.2.4 ist

$$\Omega_{A/R} \cong A/A\cdot\frac{df_1}{dT_1}.$$

Damit gilt

$$\Omega_{A/R} = 0 \Leftrightarrow \frac{df_1}{dT_1} \bmod (f_1) \text{ ist eine Einheit in A}$$

$$\Leftrightarrow \text{Das von } \frac{df_1}{dT_1} \text{ und } f_1 \text{ erzeugte Ideal von } R[T_1] \text{ ist gleich } R[T_1].$$

Ist R ein Körper, so ist die Bedingung äquivalent dazu, daß f_1 ein separables Polynom ist, d.h. keine mehrfache Nullstellen hat in der algebraischen Abschließung von R.
QED.

4.2.5 Aufgabe 3: Quotientenringe *63*

Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und A eine (kommutative) R-Algebra ohne Nullteiler mit dem Quotientenkörper F. Beweisen Sie, es gilt

$$\Omega_{F/R} \cong F \otimes_A \Omega_{A/R}.$$

Beweis. Sei

$$d: A \longrightarrow \Omega_{A/R}$$

das natürliche Differential von A über R. Es reicht zu zeigen, die Abbildung

$$d': F \longrightarrow F \otimes_A \Omega_{A/R},\ \frac{a}{b} \mapsto \frac{1}{b^2} \otimes (bda - adb)$$

ist eine wohldefinierte R-Derivation und besitzt die Universalitätseigenschaft von $\Omega_{F/R}$.

<u>Die Abbildung</u> d' <u>ist korrekt definiert</u>.

Seien Elemente a,a' $\in$ A und b, b' $\in$ A-{0} gegeben mit $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ in F. Weil A nullteilerfrei ist, folgt

$$a \bullet b' = a' \bullet b. \tag{1}$$

Es folgt

$$d(ab') = d(a'b)$$

also

$$bb' \bullet d(ab') = bb' \bullet d(a'b)$$

also

$$bb' \bullet (b'da + adb') = bb' \bullet (bda' + a'db)$$

also

$$b \bullet (b'^2 da + ab'db') = b' \bullet (b^2 da' + a'bdb)$$

Zusammen mit (1) folgt

$$b \bullet (b'^2 da + ba'db') = b' \bullet (b^2 da' + ab'db)$$

also

$$b'^2 bda + b^2 a'db' = b^2 b'da' + b'^2 adb$$

also

$$b'^2 bda - b'^2 adb = b^2 b'da' - b^2 a'db'$$

also

$$b'^2 (bda - adb) = b^2 (b'da' - a'db')$$

also

$$\frac{1}{b^2} \otimes (bda - adb) = \frac{1}{b'^2} \otimes (b'da' - a'db')$$

<u>Die Abbildung</u> d' <u>ist eine Derivation</u>.

Für a,a' $\in$ A und b,b' $\in$ A-{0} gilt

$$d'\left(\frac{a}{b} \bullet \frac{a'}{b'}\right) \quad = d'\left(\frac{aa'}{bb'}\right)$$

$$= \frac{1}{b^2b'^2}\otimes(bb'd(aa') - aa'd(bb'))$$
$$= \frac{1}{b^2b'^2}\otimes(abb'da' + a'bb'da - aa'b'db - aa'bdb')$$
$$= \frac{1}{b^2b'^2}\otimes(a'bb'da - aa'b'db + \frac{1}{b^2b'^2}\otimes(abb'da' - aa'bdb')$$
$$= \frac{a'}{b'}\bullet\frac{1}{b^2}\otimes(bda - adb) + \frac{a}{b}\bullet\frac{1}{b'^2}\otimes(b'da' - a'db')$$
$$= \frac{a'}{b'}\bullet d\frac{a}{b} + \frac{a}{b}\bullet d'\frac{a'}{b'}$$

<u>Die Abbildung</u> d' <u>besitzt die Universalitätseigenschaft von</u> $\Omega_{F/R}$.

Seien M ein F-Vektorraum und D: F $\longrightarrow$ M eine R-Derivation. Dann ist die Zusammensetzung mit der natürlichen Einbettung A $\hookrightarrow$ F ebenfalls eine R-Derivation. Deshalb faktorisiert sich

$$D|_A: A \longrightarrow M$$

eindeutig über d: A $\longrightarrow \Omega_{A/R}$, d.h. es gibt genau eine A-lineare Abbildung

$$\tilde{D}: \Omega_{A/R} \longrightarrow M$$

mit $D|_A = \tilde{D}\circ d$. Weil M ein F-Vektorraum ist, induziert $\tilde{D}$ eine F-lineare Abbildung

$$\tilde{\tilde{D}}: F\otimes_A\Omega_{A/R} \longrightarrow M, a\otimes\omega \mapsto a\bullet \tilde{D}(\omega).$$

Für a $\in$ A und b $\in$ A-{0} gilt $\frac{a}{b}\bullet b = a$, also

$$b\bullet D\frac{a}{b} + \frac{a}{b}Db = Da.$$

Wegen $D|_A = \tilde{D}\circ d$ können wir diese Identität auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$b\bullet D\frac{a}{b} + \frac{a}{b}\tilde{D}(d(b)) = \tilde{D}(d(a)).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} D\frac{a}{b} &= \frac{1}{b}\bullet\tilde{D}(d(a)) - \frac{a}{b^2}\tilde{D}(d(b)) \\ &= \frac{1}{b^2}\bullet(b\bullet \tilde{D}(d(a)) - a\bullet \tilde{D}(d(b)) \\ &= \frac{1}{b^2}\bullet\tilde{D}(bda - adb) && (\tilde{D} \text{ ist A-linear}) \\ &= \tilde{\tilde{D}}(\frac{1}{b^2}\bullet(bda - adb)) && (\text{Definition von } \tilde{\tilde{D}}) \\ &= \tilde{\tilde{D}}\circ d'(\frac{a}{b}). \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt,

$$D = \tilde{\tilde{D}}\circ d'. \qquad (2)$$

Wir haben noch zu zeigen, die F-lineare Abbildung $\tilde{\tilde{D}}$ ist durch die Bedingung (2) eindeutig bestimmt. Dazu reicht es zu zeigen, Im(d') enthält ein Erzeugendensystem des F-Vektorraums $F\otimes_A\Omega_{A/R}$.

Nach Definition von d' gilt für $a \in A$:

$$d'\frac{a}{1} = \frac{1}{1^2}\otimes(1\bullet da - a\bullet d(1)) = 1\otimes da.$$

Damit gilt

$$\mathrm{Im}(d') \supseteq 1\otimes \mathrm{Im}(d).$$

Weil Im(d) ein Erzeugendensystem des A-Moduls $\Omega_{A/R}$ enthält (nach Bemerkung 4.2.1 (iii)), enthält damit Im(d') ein Erzeugendensystem des F-Vektorraums

$$F\otimes_A\Omega_{A/R}.$$

QED.

4.2.5 Aufgabe 4:Endlich erzeugte Erweiterung 63

Seien F ein Körper und $E = F(x_1,...,x_m)$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung von F. Zeigen Sie, $\Omega_{E/F}$ ist ein endlich-dimensionaler E-Vektorraum, der von den dx_i erzeugt wird.

Beweis. Die F-Algebra $A := F[x_1,...,x_m]$ ist nullteilerfrei und hat den Quotientenkörper E. Nach 4.2.5 Aufgabe 3 gibt es einen E-linearen Isomorphimus

$$\Omega_{E/F} \xrightarrow{\cong} E\otimes_A\Omega_{A/F}, \; d(\frac{a}{b}) \mapsto \frac{1}{b^2}\otimes(bda - adb). \tag{1}$$

Die Abbildungsvorschrift ergibt sich dabei aus dem Beweis von Aufgabe 3. Nach 4.2.4 (mit K = 0) wird $\Omega_{A/F}$ als A-Modul von den dx_i erzeugt. Also wird $F\otimes_A\Omega_{A/F}$ als F-Vektorraum von den $1\otimes dx_i \in F\otimes_A\Omega_{A/F}$ erzeugt. Auf Grund der Abbildungsvorschrift des Isomorphimus (1) für $a = x_i$ und $b = 1$ wird $\Omega_{E/F}$ erzeugt von den dx_i.

QED.

4.2.5 Aufgabe 5: Die semikubische Parabel 63

Sei $A = k[T, U]/(T^2-U^3)$. Zeigen Sie, $\Omega_{A/k}$ ist kein freier A-Modul.

Beweis. Wir bezeichnen mit t und u die Restklassen von T und U in A und setzen

$$f(T, U) := T^2-U^3$$
$$m := (T, U)^2\bullet A = (T^2, TU, U^2)\bullet A$$

Dann gilt

$$A/m \cong k[T, U]/(T^2-U^3, T^2, TU, U^2) = k[T, U]/(T^2, TU, U^2) = k + k\bullet t + k\bullet u \text{ (mit 1, t und u linear unabhängig über k)}$$

Nach 4.2.4 (mit m = 2 und n = 1) gibt es einen Isomorphismus von A-Moduln

$$\Omega_{A/R} \xrightarrow{\cong} A^2/K, \; dt \mapsto e_1 \bmod K, \; du \mapsto e_2 \bmod K \tag{1}$$

mit

$$K = A\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial T}(t,u)\cdot e_1 + \frac{\partial f}{\partial U}(t,u)\cdot e_2\right)$$
$$= A\cdot(2t\cdot e_1 - 3u\cdot e_2)$$

und $f := T^2 - U^3$. Der A-Modul $\Omega_{A/R}$ wird von dt und du erzeugt,

$$\Omega_{A/R} = A\cdot dt + A\cdot du.$$

Auf Grund des Isomorphismus (1) besteht die Relation

$$2t\cdot dt - 3t\cdot du = 0.$$

Über dem Quotientenkörper Q(A) von A sind deshalb dt und du Vielfache voneinander, d.h. es gilt

$$\dim_{Q(A)} Q(A)\otimes_A \Omega_{A/R} \le 1.$$

Wäre $\Omega_{A/R}$ frei über A, so wäre der Rang von $\Omega_{A/R}$ auch ≤ 1,

$$\mathrm{rk}\ \Omega_{A/R} = \mathrm{rk}\ Q(A)\otimes_A \Omega_{A/R} = \dim_{Q(A)} Q(A)\otimes_A \Omega_{A/R} \le 1,$$

d.h $\Omega_{A/R}$ wäre als A-Modul isomorph zu A oder gleich 0,

$$\Omega_{A/R} \cong A \text{ oder } \Omega_{A/R} = 0$$

Im ersten Fall ist

$$\Omega_{A/R}/m\,\Omega_{A/R} \cong \Omega_{A/R}\otimes_A A/m \cong A\otimes_A A/m \cong A/m = k + k\cdot t + k\cdot u,$$

also

$$\dim_k \Omega_{A/R}/m\,\Omega_{A/R} = \dim_k k + k\cdot t + k\cdot u = 3.$$

In beiden Fällen wäre

$$\dim_k \Omega_{A/R}/m\,\Omega_{A/R} \le 3. \qquad (2)$$

Wir wenden den Funktor $\otimes_A A/m$ auf (1) an und erhalten einen Isomorphismus von A/m-Moduln

$$\Omega_{A/R}/m\,\Omega_{A/R} \xrightarrow{\cong} (A/m)^2/(A/m)\cdot(2t\cdot e_1 - 3u\cdot e_2)$$

Weil A/m eine k-Algebra ist, ist dies auch ein Isomorphismus von k-Vektorräumen. Es gilt

$$\dim_k A/m = 3 \qquad \text{(siehe oben)}$$
$$\dim_k (A/m)^2 = 6.$$

Weil das Bild des Ideals $(u, t)^2 = (u^2, ut, t^2)$ von A in A/m gleich 0 ist, folgt

$$(A/m)\cdot(2t\cdot e_1 - 3u\cdot e_2) = k\cdot(2t\cdot e_1 - 3u\cdot e_2) + k\cdot t\cdot(2t\cdot e_1 - 3u\cdot e_2) + k\cdot u\cdot(2t\cdot e_1 - 3u\cdot e_2)$$
$$= k\cdot(2t\cdot e_1 - 3u\cdot e_2),$$

also

$$\dim_k (A/m)\cdot(2t\cdot e_1 - 3u\cdot e_2) = 1.$$

Zusammen erhalten wir

$$\dim_k \Omega_{A/R}/m\,\Omega_{A/R} = 6 - 1 = 5.$$

Wie wir oben gesehen haben, würde aber (2) gelten, wenn $\Omega_{A/R}$ ein freier A-Modul wäre. Also kann $\Omega_{A/R}$ nicht frei sein über A.

QED.

4.2.5 Aufgabe 6: Tensorprodukte *63*

Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und A, B zwei (kommutative) R-Algebren. Zeigen Sie, es gibt Isomorphismen

$$\Omega_{A\otimes_R B/R} \cong (\Omega_{A/R}\otimes_R B) \oplus (A\otimes_R \Omega_{B/R})$$

Beweis. Seien

$$d_A: A \longrightarrow \Omega_{A/R} \text{ und } d_B: B \longrightarrow \Omega_{B/R}.$$

Dies sind R-lineare Abbildungen. Durch Anwenden der Funktoren $\otimes_R B$ bzw. $A\otimes_R$ erhalten wir R-lineare Abbildungen

$$d_A\otimes 1: A\otimes_R B \longrightarrow \Omega_{A/R}\otimes_R B \text{ und } 1\otimes d_B: A\otimes_R B \longrightarrow A\otimes_R \Omega_{B/R}.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, die R-lineare Abbildung

$$d: A\otimes_R B \longrightarrow (\Omega_{A/R}\otimes_R B) \oplus (A\otimes_R \Omega_{B/R}), x \mapsto ((d_A\otimes 1)(x), (1\otimes d_B)(x)),$$

besitzt die Universalitätseigenschaft von $\Omega_{A\otimes_R B/R}$.

<u>Die Abbildung d ist eine R-Derivation</u>.
Nach Konstruktion ist d eine R-lineare Abbildung. Es reicht zu zeigen, d ist eine Derivation. Für a, a' ∈ A und b,b' ∈ B gilt

$$\begin{aligned}
d((a\otimes b)\cdot(a'\otimes b')) &= d((aa')\otimes(bb'))\\
&= (d_A(aa')\otimes(bb'),0) + (0, (aa')\otimes d_B(bb'))\\
&= ((a'\cdot d_A a + a\cdot d_A a')\otimes(bb'),0) + (0, (aa')\otimes(b'\cdot d_B b + b\cdot d_B b'))\\
&= ((a'\otimes b')\cdot(d_A a\otimes b) + (a\otimes b)\cdot(d_A a'\otimes b'),0)\\
&\qquad +(0,(a'\otimes b')\cdot (a\otimes d_B b) + (a\otimes b)\cdot(a'\otimes d_B b'))\\
&= ((a'\otimes b')\cdot(d_A a\otimes b), (a'\otimes b')\cdot (a\otimes d_B b))\\
&\qquad + ((a\otimes b)\cdot(d_A a'\otimes b'), (a\otimes b)\cdot(a'\otimes d_B b'))\\
&= (a'\otimes b')\cdot(d_A\otimes 1)(a\otimes b), (1\otimes d_B)(a\otimes b))\\
&\qquad +(a\otimes b)\cdot(d_A\otimes 1)(a'\otimes b'), (1\otimes d_B)(a'\otimes b')\\
&= (a'\otimes b')\cdot d(a\otimes b) + (a\otimes b)\cdot d(a'\otimes b')
\end{aligned}$$

Da beide Seiten der Identität additiv sind in den beiden Faktoren (a⊗b) und (a'⊗b'), folgt

$$d(x\cdot y) = y\cdot d(x) + x\cdot d(y) \text{ für } x, y \in A\otimes_R B.$$

Mit anderen Worten d ist ein Derivation.
<u>Die Abbildung d besitzt die Universalitätseigenschaft</u>.
Seien M ein Modul über $A\otimes_R B$ und

$$D: A\otimes_R B \longrightarrow M$$

eine R-Derivation. Auf Grund der natürlichen R-Algebra-Homomorphismen

$$A \longrightarrow A\otimes_R B, a \mapsto a\otimes 1, \text{ und } B \longrightarrow A\otimes_R B, b \mapsto 1\otimes b,$$

ist M auch ein Modul über A und B. Durch Zusammensetzung von D mit diesen erhalten wir R-Derivationen

$$A \longrightarrow M, a \mapsto D(a\otimes 1), \text{ und } B \longrightarrow M, b \mapsto D(1\otimes b).$$

Diese fakorisieren sich eindeutig über d_A bzw. d_B. Es gibt eindeutig bestimmte A-lineare bzw. B-lineare Abbildungen

$$D': \Omega_{A/R} \longrightarrow M \text{ bzw. } D'': \Omega_{B/R} \longrightarrow M$$

mit

$$D(a\otimes 1) = D'(d_A(a)) \text{ für jedes } a \in A \text{ und}$$

$$D(1\otimes b) = D''(d_B(b)) \text{ für jedes } b \in B.$$

Weil M ein Modul ist über A und über B induzieren D' und D'' Abbildungen

$$\widetilde{D}': \Omega_{A/R}\otimes_R B \longrightarrow M,\ (a\otimes b) \mapsto b\bullet D'(a) = (1\otimes b)\bullet D'(a) \text{ und}$$

$$\widetilde{D}'': A\otimes_R \Omega_{B/R} \longrightarrow M,\ (a\otimes b) \mapsto a\bullet D''(b) = (a\otimes 1)\bullet D''(b)$$

welch $A\otimes_R B$-linear sind. Es folgt

$$\begin{aligned} D(a\otimes b) &= D((a\otimes 1)\bullet(1\otimes b)) \\ &= (1\otimes b)\bullet D(a\otimes 1) + (a\otimes 1)\bullet D(1\otimes b) \quad \text{(D ist eine Derivation)} \\ &= (1\otimes b)\bullet D'(d_A(a)) + (a\otimes 1)\bullet D''(d_B(b)) \\ &= \widetilde{D}'(d_A(a)\otimes b) + \widetilde{D}''(a\otimes d_B(b)) \end{aligned}$$

Sei $\widetilde{D}$ die $A\otimes_R B$-lineare Abbildung

$$\widetilde{D}: (\Omega_{A/R}\otimes_R B) \oplus (A\otimes_R \Omega_{B/R}) \longrightarrow M,\ (\omega\otimes b, a\otimes\eta) \mapsto \widetilde{D}'(\omega\otimes b) + \widetilde{D}''(a\otimes\eta).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} D(a\otimes b) &= \widetilde{D}(d_A(a)\otimes b, a\otimes d_B(b)) && \text{(Definition von } \widetilde{D}) \\ &= \widetilde{D}((d_A\otimes 1)(a\otimes b), (1\otimes d_B)(a\otimes b)) \\ &= \widetilde{D}(d(a\otimes b)) && \text{(Definition von d)} \\ &= (\widetilde{D}\circ d)(a\otimes b) \end{aligned}$$

Da auf beiden Seiten additive Funktionen stehen, folgt

$$D = \widetilde{D}\circ d. \tag{1}$$

Wir haben noch zu zeigen, daß die $A\otimes_R B$-lineare Abbildung

$$\widetilde{D}: (\Omega_{A/R}\otimes_R B) \oplus (A\otimes_R \Omega_{B/R}) \longrightarrow M$$

durch die Bedingung (1) eindeutig bestimmt ist. Dazu reicht es zu zeigen, im Bild der Abbildung

$$d: A\otimes_R B \longrightarrow (\Omega_{A/R}\otimes_R B) \oplus (A\otimes_R \Omega_{B/R})$$

liegt ein Erzeugendensystem des $A\otimes_R B$-Moduls

$$(\Omega_{A/R}\otimes_R B) \oplus (A\otimes_R \Omega_{B/R}). \tag{2}$$

Nach Bemerkung 4.2.1(iii) enthält $\mathrm{Im}(d_A)$ ein Erzeugendensystem des A-Moduls $\Omega_{A/R}$, d.h. $\mathrm{Im}(d_A\otimes 1)$ enthält ein Erzeugendensystem des ersten direkten Summand von (2) (einem $A\otimes_R B$-Modul). Analog ergibt sich, daß $\mathrm{Im}(1\otimes d_B)$ ein Erzeugendensystem des des zweiten direkten Summanden von (2) enthält (einme $A\otimes_R B$-Modul). Wegen

$$\begin{aligned} d(a\otimes 1) &= (d_A\otimes 1)(a\otimes 1), (1\otimes d_B)(a\otimes 1)) \\ &= (d_A(a)\otimes 1, a\otimes d_B(1)) \\ &= (d_A(a)\otimes 1, 0) \end{aligned}$$

gilt

$$\mathrm{Im}(d) \supseteq \mathrm{Im}\,(d_A\otimes 1) \oplus 0.$$

Damit enthält Im(d) ein Erzeugendensystem des ersten direkten Summanden von (2). Wegen

$$\begin{aligned} d(1\otimes b) &= (d_A\otimes 1)(1\otimes b), (1\otimes d_B)(1\otimes b)) \\ &= (d_A(1)\otimes b, 1\otimes d_B(b)) \\ &= (0, 1\otimes d_B(b)) \end{aligned}$$

gilt

$$\mathrm{Im}(d) \supseteq 0 \oplus \mathrm{Im}(1\otimes d_B).$$

Damit enthält Im(d) auch ein Erzeugendensystem des zweiten direkten Summanden von (2), also insgesamt eines von (2). Die $A\otimes_R B$-lineare Abbildung $\widetilde{D}$ ist somit durch (1) eindeutig festgelegt.

QED.

4.2.6 Die erste fundamentale exakte Sequenz 62

Für beliebige Homomorphismen $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ kommutativer Ringe mit 1 besteht eine exakte Sequenz von C-Moduln und C-linearen Abbildungen

$$\Omega_{B/A}\otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega_{C/A} \xrightarrow{\beta} \Omega_{C/B} \longrightarrow 0$$
$$d_{B/A}(b)\otimes c \mapsto c\bullet d_{C/A}(v(b)),\ d_{C/A}(c) \mapsto d_{C/B}(c)$$

(vgl. auch Matsumura [1], (26.H)).[10] Dabei sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent.

(a) Es gibt eine C-lineare Abbildung, welche linksinvers ist zu α.

(b) α ist injektiv und $\mathrm{Im}(\alpha)$ ist ein direkter Summand von $\Omega_{C/A}$.

(c) Die Abbildung $\mathrm{Der}_A(C, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M)$, $D \mapsto D\circ\phi$, ist surjektiv für jeden B-Modul M.

Beweis.
Wir können den zweiten Homomorphismus

$$\phi: B \longrightarrow C$$

als Homomorphismus von A-Algebren ansehen. Nach Bemerkung 4.1.1.A (iv) ist dann die folgende Sequenz exakt.

---

[10] Im Original wir nur der Spezielfall von Körpererweiterungen $F \hookrightarrow E' \hookrightarrow E$ behandelt, d.h. der Fall
$A = F, B = E', C = E.$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_B(C, M) \xrightarrow{i} \mathrm{Der}_A(C, M) \xrightarrow{\phi_0} \mathrm{Der}_A(B, M)$$

$$D \mapsto D \quad , \quad D \mapsto D\circ\phi$$

Dabei ist i die natürliche Einbettung (die von Tatsache kommt, daß jeder B-Derivation auch eine A-Derivation ist) und ϕ_0 ist die Zusammensetzung vom ϕ. Diese Sequenz ist funktoriell bezüglich M in dem Sinne, daß für jeden Homomorphismus von B-Moduln f: $M \longrightarrow M'$ das Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
0\longrightarrow & \mathrm{Der}_B(C,M) & \xrightarrow{i} & \mathrm{Der}_A(C,M) & \xrightarrow{\phi_0} & \mathrm{Der}_A(B,M) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0\longrightarrow & \mathrm{Der}_B(C,M') & \xrightarrow{i'} & \mathrm{Der}_A(C,M') & \xrightarrow{\phi_0} & \mathrm{Der}_A(B,M') \\
 & D & \mapsto & D,\ D,\ D & \mapsto & D\circ\phi,\ D \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & f\circ D\ ,D' & \mapsto & D',f\circ D,D' & \mapsto & D'\circ\phi,f\circ D
\end{array}$$

kommutativ ist. Dabei ist auch i' die natürlichen Einbettung und die vertikalen Pfeile bezeichnen jeweils die Zusammensetzung mit f. Mit Hilfe der funktoriellen Isomorphismen von 4.2.4 erhalten wir eine exakte Sequenz von C-Moduln.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/B}, M) \xrightarrow{i} \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, M) \xrightarrow{\phi_0} \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M),$$

welche funktoriell bezüglich M ist. Weil M ein C-Modul ist, können wir den Hom-Modul rechts auch als Modul von C-lineaen Abbildungen schreiben,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/B}, M) \xrightarrow{i} \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, M) \xrightarrow{\phi_0} \mathrm{Hom}_C(C\otimes_B\Omega_{B/A}, M). \quad (1)$$

Weil diese Sequenz exakt ist für jeden C-Modul, ergibt sich die Exaktheit der folgenden Sequenz

$$C\otimes_B\Omega_{B/A} \xrightarrow{\alpha} \Omega_{C/A} \xrightarrow{\beta} \Omega_{C/B} \longrightarrow 0.$$

Diese ergibt sich wie folgt.

<u>Exaktheit an der Stelle</u> $\Omega_{C/B}$.

Wir betrachten (1) mit M := Koker(β).Das Bild der natürlichen Surjektion

$$\gamma:\Omega_{C/B} \longrightarrow \mathrm{Koker}(\beta) \quad (2)$$

bei i ist Null (wegen $i(\gamma) = \gamma\circ\beta$ nach Definition von Koker(β)). Das Bild der Null-Abbildung ist es aber auch. Wegen der Injektivität von i folgt $\gamma = 0$, d.h. β ist surjektiv.

<u>Es gilt $\beta\circ\alpha = 0$</u>, d.h. $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)$.

Wir betrachten (1) mit $M = \Omega_{C/B}$. Das Bild der identischen Abbildung

$$\mathrm{Id}: \Omega_{C/B} \longrightarrow \Omega_{C/B}$$

bei $\phi_0\circ i$ ist Null. Dieses Bild ist aber

$$\begin{aligned}
\phi_0(i(\mathrm{Id})) &= \phi_0(\mathrm{Id}\circ\beta) \\
&= \mathrm{Id}\circ\beta\circ\alpha
\end{aligned}$$

$= \beta\circ\alpha.$

<u>Exaktheit an der Stelle</u> $\Omega_{C/A}$.

Wir betrachten (1) mit $M = \Omega_{C/A}/\mathrm{Im}(\alpha)$. Das Bild der natürlichen Abbildung

$$\rho: \Omega_{C/A} \longrightarrow \Omega_{C/A}/\mathrm{Im}(\alpha) = M,$$

bei ϕ_0 ist gleich

$$\phi_0(\rho) = \rho\circ\alpha = 0.$$

Weil (1) exakt ist, liegt ρ im Bild von i, d.h. es gibt eine C-lineare Abbildung

$$\tilde{\rho}: \Omega_{C/B} \longrightarrow M = \Omega_{C/A}/\mathrm{Im}(\alpha)$$

mit

$$\rho = i(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}\circ\beta.$$

Insbesondere gilt

$$\rho(\mathrm{Ker}(\beta)) = 0,$$

also

$$\mathrm{Ker}(\beta) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha).$$

Weil auch die umgekehrte Inklusion besteht (siehe oben), folgt

$$\mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha).$$

<u>(a) $\Rightarrow$ (b)</u>. Nach Voraussetzung gibt es eine C-lineare Abbildung

$$\gamma: \Omega_{C/A} \longrightarrow \Omega_{B/A}\otimes_B C \text{ mit } \gamma\circ\alpha = \mathrm{Id}.$$

Dann ist α trivialerweise injektiv. Wir haben noch zu zeigen, daß $\mathrm{Im}(\alpha)$ ein direkter Summand von $\Omega_{C/A}$ ist. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\varphi:\mathrm{Im}(\alpha) \oplus \mathrm{Ker}(\gamma) \longrightarrow \Omega_{C/A}, (x,y) \mapsto x+y. \qquad (3)$$

Weil $\mathrm{Im}(\alpha)$ und $\mathrm{Ker}(\beta)$ sind C-Teilmoduln von $\Omega_{C/A}$ (weil α und β beides C-lineare Abbildungen sind). Es reicht zu zeigen, diese Abbildung ist bijektiv.

Sei $z \in \Omega_{C/A}$ vorgegeben. Wegen $\beta\circ\alpha = 0$ gilt $\beta(\alpha(\gamma(z))) = 0$, also

$$\alpha(\gamma(z)) \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha),$$

und

$$\begin{aligned}\gamma(z-\alpha(\gamma(z))) &= \gamma(z) - \gamma(\alpha(\gamma(z)))\\ &= \gamma(z) - \gamma(z) \qquad (\text{wegen } \gamma\circ\alpha = \mathrm{Id})\\ &= 0,\end{aligned}$$

also

$$z-\alpha(\gamma(z)) \in \mathrm{Ker}(\gamma).$$

Damit ist $(\alpha(\gamma(z)), z-\alpha(\gamma(z)))$ ein wohldefiniertes Element von $\mathrm{Im}(\alpha) \oplus \mathrm{Ker}(\gamma)$ dessen Bild bei φ gleich z ist. Wir haben gezeigt, φ ist surjektiv.

Sei jetzt (x,y) aus dem Kern von φ. Dann gilt $x = -y \in \mathrm{Im}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\gamma)$, d.h. es gibt ein $z \in \Omega_{B/A}\otimes_B C$ mit

$$x = \alpha(z) \text{ und es gilt } \gamma(x) = 0.$$

Wegen $\gamma\circ\alpha = \mathrm{Id}$ folgt

$$0 = \gamma(x) = \gamma(\alpha(z)) = z,$$

also $x = \alpha(z) = \alpha(0) = 0$ und $y = -x = -0 = 0$, also $(x,y) = (0,0)$. Wir haben gezeigt, der Kern von φ ist trivial. Also ist φ ein Isomorphismus.

<u>(b) $\Rightarrow$ (c)</u>. Nach Voraussetzung ist die erste fundamentale exakte Sequeze eine kurze exakte Sequenz von C-Moduln,

$$0 \longrightarrow C\otimes_B\Omega_{B/A} \xrightarrow{\alpha} \Omega_{C/A} \xrightarrow{\beta} \Omega_{C/B} \longrightarrow 0,$$

welche zerfällt. Weil der Hom-Funktor mit endlichen direkten Summen kommutiert erhalt wir durch Anwenden von $\mathrm{Hom}_C(? , M)$ für jeden C-Modul M eine kurze exakte Sequenz, d.h. (1) ist sogar kurz exakt. Wir gesehen haben ist (1) für jedenC-Modul gerade die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_B(C, M) \xrightarrow{i} \mathrm{Der}_A(C, M) \xrightarrow{\phi_0} \mathrm{Der}_A (B, M)$$

Weil es sogar eine kurze exakte Sequenz ist, ist ϕ_0 surjektiv, d.h. es gilt (c).

<u>(c) $\Rightarrow$ (a)</u>. Die Surjektivitätsaussage von (c) bedeutet geraden, daß die Sequenz (1) sogar kurz exakt ist (für jeden C-Modul M). Insbesondere für

$$M := C\otimes_B\Omega_{B/A}$$

bedeutet dies, daß die identische Abbildung von $C\otimes_B\Omega_{B/A}$ im Bild der Abbildung ϕ_0 von (1) liegt, d.h. es gibt eine C-lineare Abbildung

$$r:\Omega_{C/A} \longrightarrow C\otimes_B\Omega_{B/A}$$

mit

$$\mathrm{Id} = \phi_0(r) = r\circ\alpha.$$

Mit anderen Worten, r ist eine C-lineare und zu α linksinverse Abbildung.Es gilt also (a).
QED.

4.2.7 Separabel algebraische Körpererweiterungen 63

4.2.7 A Definition 63

Eine algebraische Körpererweiterung E/F heißt <u>separabel algebraisch</u>, wenn es für jedes Element $x \in E$ ein Polynom $f \in F[T]$ (in einer Unbestimmten T) gibt mit

$$f(x) = 0,$$

welche keine mehrfachen Nullstellen besitzt (in einer algebraische Abschließung von F).
Bemerkungen

(i) Ist $f \in F[T]$ irreduzibel, so besitzt f genau dann keine mehrfachen Nullstellen, wenn die Ableitung f' von f ein von 0 verschiedenes Polynom ist.
(ii) Besitzt F die Charakteristik 0, so ist jede algebraische Körpererweiterung E/F separabel algebraisch.

4.2.7 B Lemma: Separabilität und Differentiale 63

Seien E/F und E'/F Körpererweiterungen mit $E' \subseteq E$ und E/E'separabel algebraisch. Dann ist die E-lineare Abbildung

$$E\otimes_{E'}\Omega_{E'/F} \longrightarrow \Omega_{E/F} \qquad (1)$$

von 4.2.6 injektiv.

Beweis. Sei K der Kern der Abbildung (1). Es reicht zu zeigen,

$$K = 0.$$

Aus der Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow E\otimes_F\Omega_{E'/F} \longrightarrow \Omega_{E/F}$$

erhalten wir durch Anwenden des linksexakten Funktors $\mathrm{Hom}_E(? , E)$ die exakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_E(\Omega_{E/F}, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(\Omega_{E'/F}, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(K, E) \longrightarrow 0.$$

Wäre K von Null verschieden, so wäre es auch die Hom-Menge rechts (weil sie eine Abbildung enthält, die eine Basis des E-Vektorraums K in vorgegebene Elemente von E abbildet). Es reicht also zu zeigen, diese Hom-Menge ist gleich 0, d.h.

$$\mathrm{Hom}_E(\Omega_{E/F}, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(\Omega_{E'/F}, E)$$

ist surjektiv. Auf Grund der Universalitätseigenschaften der Differentialmoduln, ist dies äquivalent zur Surjektivität der Abbildung

$$\mathrm{Der}_F(E, E) \longrightarrow \mathrm{Der}_F(E', E).$$

Es reicht zu zeigen, jede F-Derivation

$$D: E' \longrightarrow E$$

läßt sich zu einer F-Derivation

$$\tilde{D}: E \longrightarrow E.$$

Wir werden sogar zeigen, die Fortsetzung $\tilde{D}$ ist eindeutig bestimmt. Es reicht deshalb, die Existenz und Eindeutigkeit von $\tilde{D}$ für endliche Körpererweiterungen E/E' zu beweisen, denn im allgemeinen Fall ist jedes Element der algebraischen Erweiterung E/E' bereits in einer endlichen Teilerweiterung enthalten und die Fortsetzungen von D auf die endlichen Teilerweiterungen stimmen wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzungen auf den gemeinsamen Teilen ihrer Definitionsbereiche überein, so daß sie gemeinsam ein Fortsetzung auf E definieren. Sei also

$$E = E'(\alpha_1,...,\alpha_r)$$

eine endliche Körper-Erweiterung von E'. Zum Beweis der Existenz genau einer Fortsetzung von D auf E können wir annehmen, daß die Erweiterung einfach ist, sagen wir

$$E = E'(\alpha) = E'[T](f)$$

mit einem separablen irreduziblen Polynom

$$f = \sum_{i=0}^{n+1} f_i \cdot T^i \in E'[T].$$

Die Ableitung f' von f ist ungleich Null, weil die Erweiterung E/E' separabel algebraisch ist, und hat mit dem irreduziblen Polynom f keinen gemeinsamen Teiler. Es gibt also Polynome $a, b \in E'[T]$ mit

$$a\cdot f + b\cdot f' = 1.$$

Wir setzen für die Unbestimmte das Element α ein und erhalten

$$b(\alpha)\cdot f'(\alpha) = 1.$$

<u>Eindeutigkeit der Fortsetzung von</u> D <u>zu einer</u> F-<u>Derivation auf</u> E.

Sei $\tilde{D}: E \longrightarrow E$ eine solche Fortsetzung. Für

$$x = c_0 + ... + c_i\alpha^i + ... + c_n\alpha^n \in E \text{ mit } c_i \in E'$$

gilt dann

$$\widetilde{D}(x) = \sum_{i=0}^{n} (D(c_i)\cdot\alpha^i + i\cdot c_i\cdot\alpha^{i-1}\cdot D(\alpha)),$$

d.h. $\widetilde{D}$ ist eindeutig festgelegt durch D und den Wert $D(\alpha)$. Wegen $f(\alpha) = 0$ gilt auch

$$0 = \widetilde{D}(\sum_{i=0}^{n+1} f_i\cdot\alpha^i) = \sum_{i=0}^{n+1} D(f_i)\cdot\alpha^i + f'(\alpha)\cdot \widetilde{D}(\alpha),$$

also

$$\widetilde{D}(\alpha) = -\frac{1}{f'(\alpha)}\cdot \sum_{i=0}^{n+1} D(f_i)\cdot\alpha^i,$$

d.h. $\widetilde{D}$ ist durch D und das Minimalpolynom f eindeutig festgelegt.
Existenz der Fortsetzung von D zu einer F-Derivation auf E.
Wir setzen

$$\xi := -\frac{1}{f'(\alpha)}\cdot \sum_{i=0}^{n+1} D(f_i)\cdot\alpha^i \in E$$

und für $g(T) = \sum_{i=0}^{m} g_i\cdot T^i \in E'[T]$ seien

$$D'(g) := \sum_{i=0}^{m} D(g_i)\cdot T^i \in E'[T]$$

und

$$\widetilde{D}(g(\alpha)) := D'(g)(\alpha) + \frac{\partial g}{\partial T}(\alpha)\cdot\xi.$$

Man beachte, D' und $\frac{\partial}{\partial T}$ sind F-Derivationen $E[T] \longrightarrow E[T]$.

Wir haben zu zeigen $\widetilde{D}$ ist eine wohldefinierte F-Derivation.

Die Definition von $\widetilde{D}$ ist korrekt.
Für je zwei Polynome $g, h \in E'[T]$ mit $g(\alpha) = h(\alpha)$ gibt es ein Polynom $u\in E'[T]$ mit

$$h(T) = g(T) + u(T)\cdot f(T).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
D'(h)(\alpha) + \frac{\partial h}{\partial T}(\alpha)\cdot\xi &= D'(g+u\cdot f)(\alpha) + \frac{\partial(g+u\cdot f)}{\partial T}(\alpha)\cdot\xi \\
&= D'(g)(\alpha) + \frac{\partial g}{\partial T}(\alpha)\cdot\xi + D'(u\cdot f)(\alpha) + \frac{\partial(u\cdot f)}{\partial T}(\alpha)\cdot\xi \\
&= D'(g)(\alpha) + \frac{\partial g}{\partial T}(\alpha)\cdot\xi \\
&\quad + D'(u)(\alpha)\cdot f(\alpha) + u(\alpha)\cdot D'(f)(\alpha) \qquad \text{(D' ist eine Derivation)} \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial T}(\alpha)\cdot f(\alpha)\cdot\xi + u(\alpha)\cdot\frac{\partial f}{\partial T}(\alpha)\cdot\xi \qquad (\tfrac{\partial}{\partial T}\text{ ist eine Derivation})
\end{aligned}$$

Wegen $f(\alpha) = 0$ und $D'(f)(\alpha) = -f'(\alpha)\cdot\xi$ folgt

$$\begin{aligned}
D'(h)(\alpha) + \frac{\partial h}{\partial T}(\alpha)\cdot\xi &= D'(g)(\alpha) + \frac{\partial g}{\partial T}(\alpha)\cdot\xi \\
&\quad 0 - u(\alpha)\cdot f'(\alpha)\cdot\xi \\
&\quad 0 + u(\alpha)\cdot\frac{\partial f}{\partial T}(\alpha)\cdot\xi \\
&= D'(g)(\alpha) + \frac{\partial g}{\partial T}(\alpha)\cdot\xi
\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, der Wert von $\tilde{D}$ an der Stelle $g(\alpha) = h(\alpha)$ ist derselbe für g und h.

Mit anderen Worten, $\tilde{D}$ ist korrekt definiert.

$\tilde{D}$ ist eine F-Derivation.

Mit D' und $\frac{\partial}{\partial T}$ ist auch $\tilde{D}$ eine F-lineare Abbildung. Es reicht zu zeigen, $\tilde{D}$ ist eine Derivation. Für Polynome $g, h \in E'[T]$ gilt

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}(g(\alpha)\bullet h(\alpha)) &= D'(g\bullet h)(\alpha) + \frac{\partial(g\bullet h)}{\partial T}(\alpha)\bullet\xi \\
&= (h\bullet D'(g) + g\bullet D'(h))(\alpha) && \text{(D' ist eine Derivation)} \\
&\quad +(h\bullet\frac{\partial g}{\partial T} + g\bullet\frac{\partial h}{\partial T})(\alpha)\bullet\xi && (\tfrac{\partial}{\partial T}\text{ ist eine Derivation)} \\
&= h(\alpha)\bullet(D(g)(\alpha) + \frac{\partial g}{\partial T}(\alpha)\bullet\xi) \\
&\quad + g(\alpha)\bullet(D'(h)(\alpha) + \frac{\partial h}{\partial T}(\alpha)\ \bullet\xi \\
&= h(\alpha)\bullet\tilde{D}g(\alpha) + g(\alpha)\bullet\tilde{D}h(\alpha).
\end{aligned}
$$

Wir haben gezeigt, $\tilde{D}$ ist eine Derivation.
QED.

4.2.8 Lemma: Kriterium für einfache Erweiterungen 63

Sei E/F eine einfache Körpererweiterung,

$$E = F(x).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $\dim_E \Omega_{E/F} \le 1$.

(ii) $\Omega_{E/F} = 0 \Leftrightarrow$ E/F ist separabel algebraisch.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle.
1. Fall: x ist algebraisch unabhängig über k.
Nach 4.2.5 Aufgabe 1 gilt

$$\Omega_{F[x]/F} = F[x]\bullet dx$$

mit dx linear unabhängig über F[x]. Nach 4.2.5 Aufgabe 3 folgt

$$\Omega_{E/F} \cong E\otimes_{F[x]} \Omega_{F[x]/F} = E\otimes_{F[x]} F[x]\bullet dx$$

also

$$\Omega_{E/F} = E\bullet dx$$

mit dx linear unabhängig über E. Insbesondere gilt

$$\dim_E \Omega_{E/F} = 1,$$

d.h. es gilt Aussage (i).

Wegen $\Omega_{E/F} \ne 0$ und E/F nicht algebraisch gilt auch Aussage (ii).
2. Fall. x ist algebraisch über k.
Es gilt

$$E \cong F[T]/(f)$$

mit einer Unbestimmten T und einem irrduziblen Polynom $f \in F[T]$.

Bezeichne $f' \in F[T]$ die Ableitung des Polynoms f. Dann gilt nach 4.2.5 Aufgabe 2

$\Omega_{E/F} \cong E/E\bullet f'(x)$.
Insbesondere gilt Aussage (i). Außerdem gilt nach 4.2.5 Aufgabe 2,

$$\Omega_{E/F} \Leftrightarrow \text{f ist separabel} \Leftrightarrow \text{E/F ist separabel algebraisch.}$$

Mit anderen Worten, es gilt Aussage 2.
QED.

4.2.9 Separabel erzeugte Erweiterungen 63

4.2.9 A Definitionen 63

Sei E/F eine Körpererweiterung. Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{trdeg}_F E$$

den Transzendenzgrad von E über F, d.h. die Maximalzahl algebraisch unabhängiger Elemente von E über F (oder unendlich, falls es unendliche viele solche Elemente gibt). Die Erweiterung E/F heißt rein transzendent, wenn es eine Erzeugendensystem von E über F gibt, welches aus (über F) algebraisch unabhängigen Elementen bestteht. Die Körpererweiterung heißt separabel erzeugt, wenn es eine rein transzendente Teilerweiterung E'/F gibt mit $E' \subseteq E$ und E/E' separabel algebraisch.

Bemerkungen

(i) Ist $E = F(x_1,...,x_m)$, so ist $\mathrm{trdeg}_F E$ die Anzahl der Elemente einer maximalen Teilmenge von $\{x_1,...,x_m\}$ aus (über F) algebraisch unabhängigen Elementen (vgl. Bourbaki [3], Kapitel V, §5, Abschnitt 3, Satz 3).

(ii) Ist die Charakteristik vom F ungleich 0, so ist jede Körpererweiterung von F separabel erzeugt.

4.2.9B Satz: Separabel erzeugte Erweiterungen 63

Sei E/F eine endlich erzeugte Körpererweiterung. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $\dim_E \Omega_{E/F} \ge \mathrm{trdeg}_F E$.

(ii) In (i) gilt genau dann das Gleichheitszeichen, wenn E/F separabel erzeugt ist.

Beweis. Sei

$$E = F(x_1,....,x_m)$$

Nach 4.2.5 Aufgabe 4 ist $\Omega_{E/F}$ ein endlich-dimensionaler E-Vektorraum. Wir bezeichnen desssen Dimensiom mit

$$d := \dim_E \Omega_{E/F}$$

und führen den Beweis durch Induktion nach d.

Induktionsanfang: $d = 0$ (d.h. $\Omega_{E/F} = 0$).

Wir führen den Beweis durch Induktion nach m.

Im Fall $m = 1$ ist E/F eine einfache Körpererweiterung mit $\Omega_{E/F} = 0$. Nach 4.2.8 (ii) ist E/F separabel algebraisch, also insbesondere

$$\mathrm{trdeg}_F E = 0.$$

Insbesondere ist

$$\dim_E \Omega_{E/F} = 0 = \mathrm{trdeg}_F E,$$

d.h. es gilt Aussage (i).
Als endlich erzeugte separabel algebraische Erweiterung ist E/F auch separabel erzeugt, d.h. es gilt Aussage (ii).
Im Fall $m > 1$ setzen wir

$$E' := F(x_1).$$

Wegen der ersten fundamentalen exakten Sequenz 4.2.6 für $F \hookrightarrow E' \hookrightarrow E$,

$$\Omega_{E'/F} \otimes_{E'} E \longrightarrow \Omega_{E/F} \longrightarrow \Omega_{E/E'} \longrightarrow 0,$$

gilt mit $\Omega_{E/F} = 0$ auch $\Omega_{E/E'} = 0$. Wegen

$$E = E'(x_2,...,.x_m)$$

können wir nach Induktionsvoraussetzung annehmen, daß die Behauptung für E/E' gilt. Nach (i) ist dann

$$0 = \dim_E \Omega_{E/E'} \geq \operatorname{trdeg}_F E,$$

d.h. E/E' ist eine algebraische Körpererweiterung und nach (ii) ist E/E' separabel erzeugt, also

$$E/E' \text{ separabel algebraisch.} \tag{1}$$

Nach 4.2.7 B ist die E-lineare Abbildung

$$E \otimes_F \Omega_{E'/F} \longrightarrow \Omega_{E/F} \; (= 0)$$

injektiv, also $E \otimes_F \Omega_{E'/F} = 0$, also

$$\Omega_{E'/F} = 0.$$

Nach 4.2.8 ist $E' = F(x_1)$ separabel algebraische über F. Zusammen mit (1) sehen wir, daß E/F separabel algebraisch ist. Insbesondere ist

$$\dim_E \Omega_{E/F} = d = 0 = \operatorname{trdeg} E/F,$$

d.h. es gilt Aussage (i). Und weil E/F separabel algebraische (also auch separabel erzeugt ist), gilt auch Aussage (ii).
<u>Induktionsschritt</u>: $d > 0$.
Nach Bemerkung 4.2.1 (iii) wird $\Omega_{E/F}$ über E von den Elementen der Gestalt dx mit x $\in$ E erzeugt. Es gibt also ein $x \in E$ mit

$$d_{E/F}x \neq 0.$$

Wir betrachten die erste fundamentale exakte Sequenz

$$\Omega_{E'/F} \otimes_{E'} E \xrightarrow{\alpha} \Omega_{E/F} \longrightarrow \Omega_{E/E'} \longrightarrow 0,$$

mit $E' := F(x)$. Wegen $\alpha(d_{E'/F}x \otimes 1) = d_{E/F}x \neq 0$ gilt $d_{E'/F}x \neq 0$, also

$$\Omega_{E'/F} \neq 0.$$

Nach 4.2.8 (1) ist $\dim_{E'} \Omega_{E'/F} = 1$, also

$$\dim_E \Omega_{E'/F} \otimes_{E'} E = 1.$$

Weil das Bild der E-linearen Abbildung α ungleich Null ist, muß α injektiv sein. Es folgt

$$d = \dim_E \Omega_{E/F} = \dim_E \Omega_{E/E'} + 1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung (bezüglich d) gilt

$$\dim_E \Omega_{E/E'} \geq \operatorname{trdeg}_{E'} E,$$

also

$$\dim_E \Omega_{E/F} = \dim_E \Omega_{E/E'} + 1 \geq \operatorname{trdeg}_{E'} E + 1 \geq \operatorname{trdeg}_{E'} E + \operatorname{trdeg}_F E' = \operatorname{trdeg}_F E. \tag{2}$$

(für letzte Gleichheitszeichen siehe zum Beispiel Bourbaki [3], Kapitel V, §5, Abschnitt 3, Satz 4). Damit ist Aussage (i) bewiesen.

Wenn in der Abschätzung von Aussage (i) das Gleichheitszeichen gilt, so muß in (2) überall das Gleichheitszeichen gelten. Insbesondere ist

$$\mathrm{trdeg}_F E' = 1,$$

d.h. E'/F = F(x)/F ist eine rein transzendente Erweiterung. Außerdem erhalten wir aus (2) auch

$$\dim_E \Omega_{E/E'} = \mathrm{trdeg}_{E'} E.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist E/E' separabel erzeugt. Wegen E'/F rein transzendent, ist dann aber auch E/F separabel erzeugt.

Wir haben noch zu zeigen, daß für separabel erzeugte Erweiterungen

$$E = F(x_1,\ldots,x_m) \text{ von } F$$

gilt

$$\dim_E \Omega_{E/F} = \mathrm{trdeg}_F E.$$

Nach Voraussetzung gibt es eine (endlich erzeugte) rein transzendente Erweiterung E'/F mit $E' \subseteq E$ und E/E' (endlich erzeugt und) separabel algebraisch.
Nach 4.2.5 Aufgaben 1 und 2 gilt

$$\dim_{E'} \Omega_{E'/F} = \mathrm{trdeg}_F E'. \qquad (3)$$

Wir betrachten die erste fundamentale exakte Sequenz

$$\Omega_{E'/F} \otimes_{E'} E \longrightarrow \Omega_{E/F} \longrightarrow \Omega_{E/E'} \longrightarrow 0.$$

Weil E/E' separabel algebraisch ist, ist dies sogar eine kurze exakte Sequenz (nach 4.2.7 B) und ach 4.2.8 (ii) ist $\Omega_{E/E'} = 0$. Es gilt also

$$\Omega_{E/F} \cong \Omega_{E'/F} \otimes_{E'} E,$$

d.h.

$$\begin{aligned} \dim_E \Omega_{E/F} &= \dim_{E'} \Omega_{E'/F} \\ &= \mathrm{trdeg}_F E' && \text{(nach (3))} \\ &= \mathrm{trdeg}_F E && \text{(denn E/E' ist separabel algebraisch)} \end{aligned}$$

d.h. in Aussage (i) gilt das Gleichheitszeichen.
QED.

4.2.10 Separable Körper-Erweiterungen 64

4.2.10 A Definitionen 64

Eine Körper-Erweiterung E/F heißt <u>separabel</u>, wenn entweder die Charakteristik der beiden Körper gleich 0 ist oder wenn für je endlich viele Elemente

$$x_1,\ldots,x_s \in E,$$

welche linear unabhängig über F sind, auch deren p-te Potenzen

$$x_1^p, \ldots, x_s^p$$

linear unabhängig über F sind, wobei p die Charakteristik der beiden Körper bezeichne.
Ein Körper F der Charakteristik p heißt <u>perfekt</u>, wenn entweder p = 0 ist oder wenn jedes Element von F eine p-te Potenz (eines Elements von F) ist.

Bemerkungen

(i) Ist F ein perfekter Körper, so ist jede Körper-Erweiterung E/F separabel.
(ii) Jeder algebraisch abgeschlossene Körper ist perfekt.

(iii) Seien E ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$ und $\overline{E}$ die algebraische Abschließung von E. Dann hat für jedes $x\in E$ die Gleichung

$$T^p - x = 0$$

genau eine Lösung in $\overline{E}$, welche wir mit

$$\sqrt[p]{x} \text{ oder auch mit } x^{1/p}$$

bezeichnen. Die Menge

$$E^{1/p} := \{x^{1/p} \in \overline{E} \mid x \in E\}$$

ist ein Teilkörper von $\overline{E}$ mit

$$E \subseteq E^{1/p} \subseteq \overline{E},$$

welcher zu E isomorph ist.

(iv) Sei E/F eine Körper-Erweiterung von Körpern der Charakteristik $p \neq 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
   (a) E/F ist separabel.
   (b) Die Algebra $E\otimes_F F^{1/p}$ ist <u>reduziert</u> (d.h. sie besitzt keine nilpotenten Elemente)
   (c) Der natürliche F-Algebra-Homomorphismus

$$E\otimes_F F^{1/p} \longrightarrow E\bullet F^{1/p} \ (\subseteq \overline{E}),\ x\otimes y \mapsto x\bullet y,$$

   mit Werten im Kompositum von E und $F^{1/p}$ ist injektiv.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Sei p die Charakteristik von F und sei E/F eine Körpererweiterung. Wir können annehmen, p ist ein Primzahl. Weil F perfekt ist, ist die Abbildung

$$F \longrightarrow F,\ x \mapsto x^p,$$

ein Isomorphismus von Körpern. Außerdem ist

$$f\colon E \longrightarrow E,\ x \mapsto x^p,$$

ein injektiver Homomorphismus von Körpern. Seien

$$x_1,\dots,x_s \in E,$$

über F linear unabhängige Elemente. Angenommen es gilt

$$c_1x_1^p + \dots + c_sx_s^p = 0 \text{ mit } c_i \in F.$$

Weil F perfekt ist, gibt des Elemente $d_i \in F$ mit $c_i = d_i^p$ für $i = 1,\dots,s$. Dann gilt

$$0 = d_1^px_1^p + \dots + d_sx_s^p = (d_1x_1 + \dots + d_sx_s)^p,$$

also

$$d_1x_1 + \dots + d_sx_s = 0.$$

Weil die x_i linear unabhängig sind, folgt $d_i = 0$ für $i = 1,\dots,s$. Wir haben gezeigt, die x_i^p sind linear unabhängig über F. Damit ist E/F separabel.

<u>Zu (ii)</u>. Die Aussage ist trivial.

<u>Zu (iii)</u>. Weil $\overline{E}$ algebraisch abgeschlossen ist, besitzt die Gleichung $T^p - x = 0$ eine Lösung. Seien $\alpha, \beta \in \overline{E}$ Lösungen von $T^p - x = 0$. Dann gilt

$$(\alpha-b)^p = \alpha^p - \beta^p = x - x = 0,$$

also $\alpha = \beta$. Es gibt also genau eine Lösung. Wegen $(x^p)^{1/p} = x$ für jedes $x \in E$ gilt

$$E \subseteq E^{1/p} \ (\subseteq \overline{E}).$$

Nach Definition ist das Produkt von zwei Elmenten aus $E^{1/p}$ ein Element aus $E^{1/p}$. Weil die Charakteristik von $\overline{E}$ gleich p ($\neq 0$) ist, gilt die analoge Aussage auch für die Summe und die Differenz zweier Elemente aus $E^{1/p}$. Auch der Quotient von zwei von Null verschiedenen Elementen aus $E^{1/p}$ liegt in $E^{1/p}$. Damit ist

$$E^{1/p} \text{ ein Teilkörper von } \overline{E}.$$

Betrachten wir die Abbildung

$$E^{1/p} \longrightarrow E,\ x \mapsto x^p.$$

Weil die Charakteristik von $\overline{E}$ gleich p ($\neq 0$) ist, ist diese Abbildung ein Homomorphismus von Ringen mit 1. Nach Definition von $E^{1/p}$ ist die Abbildung surjektiv. Aus $x^p = y^p$ folgt $0 = x^p - y^p = (x-y)^p$, also x = y. Die Abbildung ist auch injektiv, also ein Isomorphismus.

<u>Zu (iv)</u>. <u>(a) $\Rightarrow$ (c)</u>. Wir fixieren eine F-Vektorraum-Basis von E, sagen wir

$$E = \sum_{i\in I} F\bullet x_i \text{ mit einer über F linear unabhängigen Familie} \{x_i\}_{i\in I}.$$

Weil E/F nach Voraussetzung (a) separabel ist, sind dann auch die p-ten Potenzen der x_i linear unabhängig über F,

$$\{x_i^p\}_{i\in I} \text{ ist eine über F linear unabhängige Familie.} \qquad (1)$$

Jedes Element $\xi \in E\otimes_F F^{1/p}$ läßt sich in der Gestalt

$$\xi = \sum_{i\in I} x_i \otimes c_i \text{ mit } c_i \in F^{1/p}$$

schreiben. Sei ξ aus dem Kern der Abbildung von (c). Wir haben zu zeigen

$$\xi = 0.$$

Nach Vorausetzung gilt

$$\sum_{i\in I} c_i x_i = 0.$$

Dann gilt aber auch

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(\sum_{i\in I} c_i x_i\Big)^p \\ &= \sum_{i\in I} c_i^p x_i^p \qquad (\text{denn } E\otimes_F F^{1/p} \text{ hat die Charakteristik p}) \end{aligned}$$

Wegen $c_i \in F^{1/p}$ gilt $c_i^p \in F$, und wegen (1) gilt $c_i^p = 0$ für jedes i, also $c_i = 0$ für jededs i, also

$$\xi = \sum_{i\in I} x_i \otimes c_i = \sum_{i\in I} x_i \otimes 0 = 0.$$

<u>(c) $\Rightarrow$ (b)</u>. Nach Voraussetzung (c) können wir $E\otimes_F F^{1/p}$ mit einer Teilalgebra der algebraischen Abschließung $\overline{E}$ von E identifizieren. Mit $\overline{E}$ ist also auch

$$E\otimes_F F^{1/p}$$

nullteilerfrei und insbesondere reduziert..

<u>(b) ⇒ (a)</u>. Angenommen, E/F ist nicht separabel. Dann gibt es Elemente

$$x_1,\ldots,x_m \in E,$$

welche linear unabhängig über F sind und deren p-te Potenzen linear abhängig sind, sagen wir

$$c_1x_1^p+\ldots+c_mx_m^p = 0 \text{ für } c_i \in F \text{ und } (x_1,\ldots,x_m) \neq (0,\ldots,0).$$

Dann sind

$$x_1\otimes 1,\ldots,x_m\otimes 1 \in E\otimes_F F^{1/p}$$

linear unabhängig über $F^{1/p}$. Insbesondere gilt

$$x_1\otimes d_1+,\ldots,x_m\otimes d_m \neq 0$$

für $d_i := c_i^{1/p} \in F^{1/p}$. Außerdem ist

$$(x_1\otimes d_1+,\ldots,x_m\otimes d_m)^p \quad = \sum_{i=1}^m (x_i\otimes d_i)^p \quad \text{(denn } E\otimes_F F^{1/p} \text{ hat die Charakteristik p)}$$

$$= \sum_{i=1}^m x_i^p\otimes d_i^p$$

$$= \sum_{i=1}^m x_i^p\otimes c_i \qquad \text{(nach Definition der } d_i\text{)}$$

$$= \sum_{i=1}^m x_i^p c_i\otimes 1 \qquad \text{(denn } c_i \in F\text{)}$$

$$= 0\otimes 1 \qquad \text{(nach Wahl der } x_i \text{ und } c_i\text{)}$$

$$= 0.$$

Damit besitzt $E\otimes_F F^{1/p}$ ein nilpotentes Element - im Widerspruch zur Annahme (b).

Also ist E/F eine separable Körper-Erweiterung.
QED.

4.2.10 B Proposition: Separabilitäts-Kriterium 64

Sei E/F eine endlich erzeugte Körpererweiterung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) E/F ist separabel.

(ii) Für jede Körper-Erweiterung F'/F ist $E\otimes_F F'$ reduziert.

(iii) E/F ist separabel erzeugt.

Beweis. Sei

$$E = F(x_1,\ldots,x_m).$$

Zum Beweis können wir annehmen, die Charakteristik

$$p$$

der beiden Körper ist eine Primzahl.

<u>(i) ⇒ (iii)</u>. Wir können annehmen, die Erzeuger

$$x_1, \ldots , x_t \text{ sind algebraisch unabhängig über F und } t = \mathrm{trdeg}_F\, E.$$

Wir führen den Beweis durch Induktion nach m.

<u>Induktionsanfang</u>: m = 1.

Falls x_1 transzendent über F ist, ist E/F rein transzendent, also insbesondere separabel erzeugt. Wir können also annehmen, x_1 ist algebraisch über F, sagen wir

$$E \cong F[T]/(f).$$

Wir haben zu zeigen, das Minimalpolynom $f \in F[T]$ von x_1 über F ist separabel.

Angenommen, f ist inseparabel. Dann gibt es eine Potenz von p, sagen wir p^e mit

$$f(T) = g(T^{p^e})$$

und einem separablen irreduziblen Polynom $g \in F[T]$. Sei

$$s := \deg g.$$

Wegen $f(x_1) = 0$ sind dann

$$1, x_1^{p^e}, x_1^{2\cdot p^e}, \ldots , x_1^{(s-1)\cdot p^e}$$

linear abhängig über F, während es

$$1, x_1, \ldots , x_1^{s-1}$$

es nicht sind (wegen $\deg f = s\cdot p^e > s$). Das steht aber im Widerspruch zur Separabilität von E/F. Also muß f separabel sein, d.h. E/F ist separabel algebraisch, also separabel erzeugt.

<u>Induktionsschritt</u>: $m > 1$
1. <u>Fall</u> $t = m$.
Dann ist E/F rein transzendent, also trivialerweise separabel erzeugt.
2. <u>Fall</u>: $t < m-1$.
Mit E/F ist auch $F(x_1,\ldots,x_{m-1})/F$ separabel. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$F(x_1,\ldots,x_{m-1}) \text{ separabel erzeugt über } F. \qquad (1)$$

Weil $x_1, \ldots , x_t$ algebraisch unabhängig über F sind und wegen $t < m-1$ in $\{ x_1 ,\ldots,x_{m-1}\}$ liegen, gilt

$$t \le \mathrm{trdeg}_F\, F(x_1,\ldots,x_{m-1}) \le \mathrm{trdeg}_F\, E = t,$$

also $\mathrm{trdeg}_F\, F(x_1,\ldots,x_{m-1}) = t$. Wegen (1) gibt es (über F) algebraisch unabhängige Elemente

$$y_1,\ldots, y_t \in F(x_1,\ldots,x_{m-1})$$

mit

$$F(x_1,\ldots,x_{m-1}) / F(y_1,\ldots, y_t) \text{ separabel algebraisch.} \qquad (2)$$

Ebenfalls nach Induktionsvoraussetzung ist

$$F(y_1,\ldots, y_t, x_m) \text{ separabel erzeugt über } F \qquad (3)$$

(wegen $t+1 < m$). Weiter ist
$t \le \mathrm{trdeg}_F\, F(y_1,\ldots, y_t, x_m) \le \mathrm{trdeg}_F\, E = t$,
also

$$\mathrm{trdeg}_F\, F(y_1,\ldots, y_t, x_m) = t.$$

Wegen (3) gibt es (über F) algebraisch unabhängige Elemente

$$z_1,\ldots, z_t \in F(y_1,\ldots, y_t, x_m)$$

mit

$$F(y_1,\ldots, y_t, x_m) / F(z_1,\ldots, z_t) \text{ separabel algebraisch.}$$

Wegen (2) ist auch

$$F(x_1,...,x_{m-1}, x_m) / F(y_1,..., y_t, x_m) \text{ separabel algebraisch,}$$

also auch

$$F(x_1,...,x_m) / F(z_1,..., z_t) \text{ separabel algebraisch.}$$

Also ist $E = F(x_1,...,x_m)$ separabel erzeugt über F, d.h. es gilt (ii).

3. Fall: $t = m-1$.

Dann sind $x_1,...,x_{m-1}$ algebraisch unabhängig über und

$$E = F(x_1,...,x_m) \text{ ist algebraisch über } F(x_1,...,x_{m-1}),$$

also

$$E \cong F(x_1,...,x_{m-1})[T]/(f)$$

mit einem irrduziblen Polynom f. Auf Grund des Induktionsanfangs ist

$$E/F(x_1,...,x_{m-1})$$

separabel erzeugt. Weil die $x_1,...,x_{m-1}$ algebraisch unabhängig über F sind, ist dann aber auch E/F separabel erzeugt über F.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). 1. Schritt: Reduktion auf den Fall E/F algebraisch.

Wie bisher können wir annehmen,

$$x_1, \dots , x_t \text{ sind algebraisch unabhängig über F und } t = \mathrm{trdeg}_F\, E,$$

und schreiben abkürzend x' für $x_1, \dots , x_t$. Nach Voraussetzung ist

$$E \text{ algebraisch separabel über } F(x').$$

Die F-Algebra

$$F(x')\otimes_F F' \text{ ist ein Quotientenring von } F[x']\otimes_F F' = F'[x']$$

und damit ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper F'(x'),

$$F(x')\otimes_F F' \hookrightarrow Q(F(x')\otimes_F F') = F'(x'). \qquad (4)$$

Wir erhalten die Inklusionen

$$\begin{aligned} F(x')\otimes_F F' &\hookrightarrow K\otimes_F F' && \text{(wegen } F(x') \hookrightarrow K) \\ &= K\otimes_{F(x')} F(x')\otimes_F F' && \text{(wegen } F(x') \hookrightarrow K) \\ &\hookrightarrow K\otimes_{F(x')} F'(x') && \text{(wegen (4))} \end{aligned}$$

Insbesondere ist $K\otimes_F F'$ ein Teilring von $K\otimes_{F(x')} F'(x')$. Es reicht also zu zeigen,

$$K\otimes_{F(x')} F'(x') \text{ ist reduziert.}$$

Nach Wahl von x' ist K eine (endlich erzeugte) separabel algebraische Körper-Erweiterung von F(x'), d.h. Bedingung (iii) ist erfüllt mit F(x') anstelle von F. Der Beweis der Implikation (iii) $\Rightarrow$ (ii) ist damit auf den Spezialfall, daß K/F algebraisch ist, zurückgeführt.

2. Schritt: Der Fall E/F algebraisch.

Nach Voraussetzung ist E/F separabel algebraisch. Nach dem Satz vom primitiven Element gilt

$$E = F[T]/(f)$$

mit einem irrduziblen Polynom $f \in F[T]$ (in einer Unbestimmten T), welches in keiner Körper-Erweiterung von F mehrfache Nullstellen besitzt. Sei

$$f = f_1\bullet\dots\bullet f_r \text{ mit } f_i \in F'[T]$$

die Zerlegung von f in irrduzible Faktoren f_i über F'. Weil f keine mehrfache Nullstellen besitzt, sind die f_i paarweise teilerfremd. Nach dem Chinesischen Restesatz gilt

$$E\otimes_F F' \cong F'[T]/(f_1\bullet ...\bullet f_r) \cong F'[T]/(f_1) \times ... \times F'[T]/(f_r)$$

wobei im direkten Produkt rechts die Multiplikation koordinatenweise erfolgt. Damit ist

$$E\otimes_F F'$$

ein direkten Produkt von Körpern und insbesondere reduziert.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Trivial: (i) ist der Spezialfall $F' = F^{1/p}$ von (ii).

QED.

4.2.11 Folgerung: der Fall F perfekt 65

Seien E/E' und E'/F endlich erzeugte Körper-Erweiterungen mit F ein perfekter Körper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) E ist separabel erzeugt über E'.

(ii) Der linke Homomorphismus

$$\alpha: \Omega_{E'/F}\otimes_{E'}E \longrightarrow \Omega_{E/F}$$

der ersten fundamentalen exakten Sequenz 4.2.6 ist injektiv.

(iii) Die Einschränkung auf E' definiert eine Surjektion

$$\mathrm{Der}_F(E, E) \longrightarrow \mathrm{Der}_F(E', E).$$

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Weil F ein perfekter Körper ist, sind

E/F und E'/F

separabel erzeugte Erweiterungen (nach Definition 4.2.9.A, Bemerkung 4.2.10.A (i) und 4.2.10.B). Nach 4.2.9.B gilt

$$\dim_E \Omega_{E/F} = \mathrm{trdeg}_F\, E \text{ und } \dim_{E'} \Omega_{E'/F} = \mathrm{trdeg}_F\, E'.$$

Aus der ersten fundamentalen exakten Sequenz

$$\Omega_{E'/F}\otimes_{E'}E \longrightarrow \Omega_{E/F} \longrightarrow \Omega_{E/E'} \longrightarrow 0$$

lesen wir ab,

$$\begin{aligned}\dim_E \Omega_{E/F} &\le \dim_E \Omega_{E/E'} + \dim_E \Omega_{E'/F}\otimes_{E'}E \\ &= \dim_E \Omega_{E/E'} + \dim_{E'} \Omega_{E'/F}\end{aligned}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn α injektiv ist. Damit ist

$$\mathrm{trdeg}_F\, E \le \dim_E \Omega_{E/E'} + \mathrm{trdeg}_F\, E',$$

wobei die Gültigkeit des Gleichheitszeichens äquivalent ist zur Injektivität von α. Weil sich beim Zusammensetzen von zwei Erweiterungen die Transzendenzgrade addieren, könen wir diese Abschätzung auch in der Gestalt

$$\mathrm{trdeg}_{E'}\, E \le \dim_E \Omega_{E/E'} \tag{1}$$

schreiben. Damit gilt

(ii) $\Leftrightarrow$ In (1) gilt das Gleichheitszeichen.

Zusammen mit 4.2.9.B folgt

(ii) $\Leftrightarrow$ E/E' ist separabel erzeugt

$\Leftrightarrow$ (i).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Nach Voraussetzung (ii) ist α injektiv. Weil α eine E-lineare Abbildung von Vektorräumen ist, ist $\mathrm{Im}(\alpha)$ ein direkter Summand von $\Omega_{E/F}$. Nach 4.2.6 ist die Abbildung

$$\mathrm{Der}_F(E, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_F(E', M),\ D \mapsto D\circ\phi,$$

surjektiv für jeden E-Vektorraum M, also auch für M = E. Es gilt also (iii).
(iii) $\Rightarrow$ (ii). Die Surjektivitätder Abbildung von (iii) impliziert die der Abbildung

$$\mathrm{Hom}_E(\Omega_{E/F}, E) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_E(\Omega_{E'/F}\otimes_{E'}E, E),\ f \mapsto f\circ\alpha. \qquad (2)$$

Wir haben zu zeigen, daß α injektiv ist. Angenommen α ist es nicht. Dann gibt es eine auf

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \subseteq \Omega_{E'/F}\otimes_{E'}E$$

definierte und von Null verschiedene E-lineare Abbildung

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \longrightarrow E.$$

Diese läßt sich zu einer E-linearen Abbildung

$$\Omega_{E'/F}\otimes_{E'}E \longrightarrow E$$

fortsetzen, welche auf $\mathrm{Ker}(\alpha)$ nicht identisch Null ist. Diese Fortsetzung kann aber nicht im Bild von (2) liegen, denn jede Abbildung der Gestalt $f\circ\alpha$ ist auf dem Kern von α identisch Null. Die Annahme $\mathrm{Ker}(\alpha) \neq 0$ steht im Widerspruch zur Surjektivität von (2). Deshalb muß α injektiv sein.
QED.

4.2.12 Aufgaben 65

4.2.12 Aufgabe 1: α im perfekten Fall 65

Seien E/E' und E'/F Körper-Erweiterungen mit F ein perfekter Körper. Zeigen Sie, der linke Homomorphismus

$$\alpha: \Omega_{E'/F}\otimes_{E'}E \longrightarrow \Omega_{E/F}$$

ist ein Isomorphismus, wenn E/E' separabel algebraisch ist.
Beweis. Die Injektivität von α folgt aus 4.2.1 (ii). Die Surjektivität ergibt sich aus der ersten fundamentalen exakten Sequenz zu $F \hookrightarrow E' \hookrightarrow E$ (vgl. 4.2.6),

$$\Omega_{E'/F}\otimes_{E'}E \longrightarrow \Omega_{E/F} \longrightarrow \Omega_{E/E'} \longrightarrow 0.$$

Man beachte, für separabel algebraische Erweiterungen E/E' gilt nach 4.2.9.B

$$\dim_E \Omega_{E/E'} = \mathrm{trdeg}_{E'} E = 0,$$

also $\Omega_{E/E'} = 0$.
QED.

4.2.12 Aufgabe 2: Differentiale & Algebraizität 65

Sei E/F eine Körper-Erweiterung von Körpern der Charakteristik p = 0. Dann ist jedes

$$x \in E \text{ mit } d_{E/F}x = 0$$

algebraisch über F.
Beweis. Sei E' := F(x). Auf Grund der ersten fundamentalen exakten Sequenz zu den Erweiterungen $F \hookrightarrow E' \hookrightarrow E$ (vgl. 4.2.6),

$$\Omega_{E'/F} \otimes_{E'} E \longrightarrow \Omega_{E/F} \longrightarrow \Omega_{E/E'} \longrightarrow 0.$$

gilt mit $d_{E/F}x = 0$ auch $d_{E'/F}x = 0$. Wegen

$$\begin{aligned}\Omega_{E'/F} &= E'\bullet d_{E'/F}x \text{ (nach 4.2.5 Aufgabe 4)}\\ &= 0\end{aligned}$$

ist nach 4.2.8 die Erweiterung E'/F separabel algebraisch, also x algebraisch über F.
QED.

4.2.12 Aufgabe 3: der Fall E = F(E^p) *65*

Sei E/F eine endlich erzeugte Körper-Erweiterung von Körpern der Charakteristik $p \ne 0$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) $\Omega_{E/F} = 0$.

(ii) $E = F(E^p)$.

Sind sie erfüllt, so ist E/F separabel algebraisch über F.

Beweis. (ii) ⇒ (i). Nach Voraussetzung ist E endlich erzeugt über F, sagen wir

$$E = F(x_1,...,x_m).$$

Ebenfalls nach Voraussetzung wird E als Algebra über F von p-ten Potenzen erzeugt. Wir können deshalb annehmen, jedes der x_i ist eine p-te Potenz, sagen wir

$$x_i = y_i^p,$$

d.h.

$$E = F(y_1^p,...,y_m^p).$$

Nach 4.2.5 Aufgabe 4 folgt

$$\Omega_{E/F} = E\bullet dy_1^p + ... + E\bullet dy_m^p.$$

Nun ist aber

$$dy_i^p \quad = p\bullet y_i^{p-1} dy_i \quad \text{(weil d eine Derivation ist)},$$

also, weil E die Charakteristik $p > 0$ hat,

$$\Omega_{E/F} = 0.$$

(i) ⇒ (ii). Wir wählen algebraisch unabhängige Elemente $x_1,..., x_t \in E$ derart, daß E algebraisch ist über $E' = F(x_1,..., x_t)$ und betrachten die erste fundamentale exakte Sequenz zu $F \hookrightarrow E' \hookrightarrow E$ (vgl. 4.2.6),

$$\Omega_{E'/F} \otimes_{E'} E \xrightarrow{\alpha} \Omega_{E/F} \longrightarrow \Omega_{E/E'} \longrightarrow 0.$$

Mit $\Omega_{E/F} = 0$ gilt auch $\Omega_{E/E'} = 0$. Weil E/E' algebraisch ist, gilt

$$\operatorname{trdeg}_{E'} E = 0 = \dim \Omega_{E/E'}.$$

Nach 4.2.9.B ist E/E' separabel algebraische Erweiterung und nach 4.2.7.B ist α injektiv. Mit $\Omega_{E/F} = 0$ gilt auch $\Omega_{E'/F} \otimes_{E'} E = 0$, also

$$\Omega_{E'/F} = 0.$$

Weil E' rein transzendent ist über F, gilt
Es gilt

$$\Omega_{E'/F} = E'\otimes_{F[x_1,...,x_t]}\Omega_{F[x_1,...,x_t]/F} \qquad \text{(nach 4.2.5 Aufage 3)}$$

$$= E'\otimes_{F[x_1,...,x_t]}\oplus_{i=1}^{t} F[x_1,...,x_t]\bullet dx_i \qquad \text{(nach 4.2.5 Aufgabe 1)}$$

Wegen $\Omega_{E'/F} = 0$ folgt t = 0 und E' = F, d.h. E/F ist separabel algebraisch. Nach dem Satz vom primitiven Element ist E/F als endlich erzeugte Erweiterung sogar einfach, d.h.

$$E = F(x) \text{ separabel algebraisch.}$$

Das Minimalpolynom $f \in F[T]$ von x über F besitzt keine mehrfachen Nullstellen. Wegen

$$F \subseteq F[E^p] \; (\subseteq E)$$

ist das Minimalpolynom g von x über $F[E^p]$ ein Teiler von f, besitzt also auch keine mehrfachen Nullstellen. Wegen $x \in E$, also $x^p \in E^p$ ist

$$T^p - x^p \in F[E^p]\,[T].$$

Weil dieses Polynom die Nullstelle x besitzt, gilt

$$g \mid T^p - x^p = (T-x)^p \text{ über } F[E^p],$$

Weil g die Nullstelle x nicht mehrfach besitzt und x die einzige Nullstelle von $T^p - x^p$ ist, ist der größte gemeinsame Teiler von g und $T^p - x^p$ ein lineares Polynom. Weil g irreduzibel ist, ist der größte gemeinsame Teiler dieser Polynome gleich g. Folgt ist g ein lineares Polynom, d.h. es gilt

$$T-x = g \in F[E^p],$$

also $x \in F[E^p]$, also

$$E = F[E^p].$$

QED.

4.2.12 Aufgabe 4: der Fall $E\otimes_F K$ reduziert 65

Sei E/F eine Körper-Erweiterung mit der Eigenschaft, daß

$$E\otimes_F K \text{ reduziert ist}$$

für jede Körpererweiterung K/F. Zeigen Sie, dann ists E/F separabel erzeugt.

Beweis. Nach Bemerkung 4.2.10.A (iv) mit $K = F^{1/p}$ ist E/F separabel, also nach 4.2.10.B separabel erzeugt.
QED.

4.2.12 Aufgabe 5: Separable Erweiterungen 65

(i) Seien E/E' und E'/F separable Körper-Erweiterungen. Dann ist E/F separabel.
(ii) Sei E/F eine separabel algebraische Körper-Erweiterung. Dann ist E/F separabel.
Beweis. Zu (i). Nach 4.2.10.B reicht es zu zeigen, für je zwei separabel erzeugte Körper-Erweiterungen

$$E/E' \text{ und } E'/F$$

ist E/F separabel erzeugt. Wir wählen Familien von Elementen

$$x_i \in E \text{ für } i \in I, \text{ bzw. } y_j \in E' \text{ mit } j \in J,$$

welche algebraisch unabhängig über E' bzw. F sind, und zwa derart, daß die Körpererweiterungen

$$E/E'(x_i \mid i \in I) \text{ und } E'/F(y_j \mid j \in J)$$

algebraisch separabel sind. Jedes Element von E ist separabel algebraisch über

$$E'(x_i \mid i \in I),$$

Weil jedes Element von E' separabel algebraisch ist über $F(y_j \mid j \in J)$ und die Eigenschaft algebraisch separabel zu sein bei Basiswechsel erhalten bleibt, ist jedes Element von

$$E'(x_i \mid i \in I),$$

algebraisch separabel über

$$F(x_i , y_j \mid i\in I, j \in J).$$

Die Zusammensetzung algebraisch separabler Erweiterungen ist algebraisch separabel. Deshalb ist

$$E \text{ algebraisch separabel über } F(x_i , y_j \mid i\in I, j \in J).$$

Zusammen erhalten wir, daß E separabel erzeugt ist über F. Damit ist Aussage (i) bewiesen.
Zu (ii). Wir können annehmen, die Charakteristik der Körper E und F ist

$$p > 0.$$

Seien

$$x_1,\dots, x_s \in E$$

über F linear unabhängige Elemente. Wir haben zu zeigen, die p-ten Potenzen dieser Elemente sind es auch. Da die Anzahl der x_i endlich ist, gibt es eine endlich erzeugte separable Teilerweiterung E'/F von E/F, welche jedes der x_i enthält,

$$x_1,\dots, x_s \in E' \text{ und } E'/F \text{ separabel algebraisch}$$

Diese Erweiterung ist insbesonder separabel erzeugt, also nach 4.2.10.B separabel. Also sind die p-ten Potenzen

$$x_1^p,\dots, x_s^p \in E'$$

linear unabhängig über F. Dies sind sie auch als Elemente des größeren Körper E. Wir haben gezeigt, E/F ist separabel.
QED.
Bemerkung

4.2.13 Bezeichnungen: R_f , M_f und $\mathcal{M}(A)$ 65

4.2.13 R_f und M_f 65

Sei R ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper F. Für $f \in R - \{0\}$ sei

$$R_f := R[T]/(1-f\bullet T)$$

(vgl. Aufgabe 1.4.6). Ist M ein R-Module, so bezeichne M_f den R_f-Modul

$$M_f := R_f \otimes_R M.$$

Bemerkungen
(i) Wir können R_f mit dem Teilring des Körpers F identifizieren, der aus den Elementen der Gestalt

$$f^{-n}\bullet a \text{ mit } a \in R \text{ und } n \text{ eine nichtnegative ganze Zahl}$$

besteht.
(ii) Um die obigen Ergebnisse auf Probleme der Geometrie anzuweden, brauchen noch verschiedene Ergebnisse der linearen Algebra.

4.2.13 B Die Moduln $\mathcal{M}(A)$ *65*

Seien R ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper

$$F := \mathbf{Q}(R)$$

und

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a^1 \\ \dots \\ a^m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(R) = R^{m\times n}$$

eine m×n-Matrix mit den Einträgen a_{ij} aus R und den Zeilen $a^1,\dots,a^m$. Der <u>Rang der Matrix</u> A,

$$\mathrm{rk}\, A = \dim_F F\bullet a^1 + \dots + F\bullet a^m,$$

ist definiert als die Dimension des F-linearen Unterraums von $F^{1\times n}$, welcher von den Zeilen von A erzeugt wird. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}(A)$ den Faktor-Modul

$$\mathcal{M}(A) := \mathcal{M}_R(A) := R^{n\times 1} / \sum_{i=1}^{m} R\bullet(a^i)^T$$

des freien R-Moduls $R^n = R^{n\times 1}$ bezüglich des Teilmoduls, der von den Transponierten der Zeilen von A erzeugt wird. Außerdem schreiben wir auch[11]

$$\mathcal{M}^T(A) := \mathcal{M}_R{}^T(A) := R^{1\times n} / \sum_{i=1}^{m} R\bullet a^i.$$

Weiter sei

$$\mathbf{GL}_m(R)$$

die Gruppe der umkehrbaren m×m-Matrizen mit Einträgen aus R, deren Inverses Einträge aus R besitzt.

Bemerkung

Der R-linearer Isomorphismus

$$R^{n\times 1} \xrightarrow{\cong} R^{1\times n},\ x \mapsto x^T,$$

welcher jede Spalte in die zugehörige transponierte Zeile abbildet induziert einen R-linearen Isomorphismus

$$\sum_{i=1}^{m} R\bullet(a^i)^T \xrightarrow{\cong} \sum_{i=1}^{m} R\bullet a^i$$

und damit einen R-linearen Isomorphismus

$$\mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}^T(A).$$

4.2.14 Lemma: Eigenschaften der $\mathcal{M}(A)$ **65**

Seien R ein Integritätsbereich und $A \in R^{m\times n}$ eine m×n-Matrix mit Einträgen aus R. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $\mathcal{M}(B\bullet A) = \mathcal{M}(A)$ für jede Matrix $B \in GL_m(R)$ und

$\mathcal{M}AC) \cong \mathcal{M}(A)$ für jede Matrix $C \in GL_n(R)$.

---

[11] $\mathcal{M}^T(A)$ kommt im Original nicht vor, läßt sich aber manchmal einfacher handhaben und ist isomorph zu

$$\mathcal{M}(A)$$

(ii) Es gibt ein Element $f \in R$-{0} und Matrizen $B \in GL_m(R_f)$ und $C \in GL_n(R_f)$ mit

$$A = B\bullet\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\bullet C.$$

Dabei sei I_r dir r×r-Einheitmatrix mit r = rk A.

Beweis. Zu (i). Die Zeilen von A' := B•A sind R-Linearkombinationen der Zeilen von A und die Zeilen von $A = B^{-1}\bullet A'$ sind R-Linearkombinationen der Zeilen von A'. Also erzeugen die Zeilen von A denselben R-Teilmodul von $R^{1\times n}$, wie die Zeilen von A'. Deshalb gilt

$$\mathcal{M}^T(A) = \mathcal{M}^T(A').$$

Durch Übergang zu den Transponierten erhalten wir

$$\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(A').$$

Die Multiplikation von rechts mit C definiert eine R-lineare Abbildung

$$\varphi: R^{1\times n} \longrightarrow R^{1\times n},\ x \mapsto x\bullet C.$$

Diese Abbildung ist bijektiv, weil die zu C inverse Matrix C^{-1} existiert und Einträge aus R besitzt (und damit die Umkehrabbildung definiert). Die Zeilen von A werden bei dieser Abbildung in die Zeilen von A" := A•C abgebildet. Der von den Zeilen von A erzeugte R-Teilmodul, also in den von Zeilen A" erzeugten Teilmodul. Die Abbildung der Teilmoduln ist ebenfalls ein R-linearer Isomorphismus (dessen Umkehrung durch C^{-1} definiert ist). Also induziert φ einen R-linearen Isomorphismus

$$\mathcal{M}^T(A) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}^T(A\bullet C).$$

Durch Übergang zu den Transponierten erhalten wir einen R-linearen Isomorphismus

$$\mathcal{M}(A) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(A\bullet C).$$

Zu (ii). Über dem Körper F läßt sich jede Matrix A durch Zeilen- und Spalten-Operationen in die Gestalt

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

überführen. Es gilbt deshalb Matrizen $B \in GL_m(F)$ und $C \in GL_n(F)$ mit

$$A = B\bullet\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\bullet C.$$

Sei f der Hauptnenner der Einträge von B, C , B^{-1}, C^{-1}. Dann gilt

$$B \in GL_m(R_f) \text{ und } C \in GL_n(R_f)$$

QED.

4.2.15 Lemma: Weitere Eigenschaften der $\mathcal{M}(A)$ 65

Seien R ein Integritätsbereich und $A \in R^{m\times n}$ eine m×n-Matrix mit Einträgen aus R. Dann gibt es ein

$$f \in R - \{0\}$$

mit der Eigenschaft, daß

$$\mathcal{M}(A)_f$$

ein freier R_f-Modul ist vom Rang

$$\mathrm{rk}\ \mathcal{M}(A)_f = n - \mathrm{rk}\ A.$$

Dabei kann man f derart wählen, daß die Bilder gewisser Standard-Einheitsvektoren

$$e_{i_{r+1}}, \ldots, e_{i_n} \in R_f^{n\times 1}$$

bei der natürlichen Abbildung

$$R_f^{n\times 1} \longrightarrow \mathcal{M}(A)_f \tag{1}$$

eine Basis von $\mathcal{M}(A)_f$ über R_f bilden.

Beweis. Nach 4.2.14 (ii) gibt es ein Element $f \in R-\{0\}$ und Matrizen $B \in GL_m(R_f)$ und $C \in GL_n(R_f)$ mit

$$A = B\bullet\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\bullet C.$$

Nach 4.2.14 (ii) gilt dann

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(A)_f &\cong \mathcal{M}(\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})_f \\ &= R_f\bullet e_1 \oplus\ldots\oplus R_f\bullet e_n \ / \ R_f\bullet e_1 \oplus\ldots\oplus R_f\bullet e_r \\ &\cong R_f\bullet e_{r+1} \oplus\ldots\oplus R_f\bullet e_n.\end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Wir können deshalb den R_f-Modul $\mathcal{M}(A)_f$ als Teilmodul des (n-r)-dimensionalen F-Vektorraums

$$\mathcal{M}(A)_f \otimes_{R_f} F$$

betrachten. Sei jetzt

$$f_1, \ldots, f_{n-r} \in \mathcal{M}(A)_f \hookrightarrow \mathcal{M}(A)_f \otimes_{R_f} F$$

eine Basis des Moduls über R_f. Das Bild des i-ten Standard-Einheitsvektors $e_i \in R_f^{n\times 1}$ bei der natürlichen Abbildung (1) bezeichnen wir mit $\overline{e}_i$. Weil die $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ den F-Vektorraum $\mathcal{M}(A)_f \otimes_{R_f} F$ erzeugen, bildet eine Teilmenge dieser Vektoren eine Basis. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\overline{e}_{r+1}, \ldots, \overline{e}_n$ diese Basis bilden. Da die $\overline{e}_i$ in $\mathcal{M}(A)_f$ liegen, gibt es $c_{ij} \in R_f$ mit

$$\overline{e}_{r+i} = \sum_{j=1}^{n-r} c_{ij} f_j \text{ für } i = 1, \ldots, n-r.$$

Weil die Vektoren $\overline{e}_{r+1}, \ldots, \overline{e}_n$ linear unabhängig sind, gilt $\det(c_{ij}) \neq 0$. Indem wir f geeignet abhändern erreichen wir, daß die Einträge von $(c_{ij})^{-1}$ in R_f liegen. Dann gilt

$$(c_{ij}) \in \mathbf{GL}_{n-r}(R_f).$$

Die Basiselemente f_j lassen sich auch umgekehrt als Linearkombinationen der $\bar{e}_{r+1}$ $,..., \bar{e}_n$ über R_f schreiben. Neben den $f_1,..., f_{n-r}$ bilden auch die Elemente $\bar{e}_{r+1},..., \bar{e}_n$ eine Basis von $\mathcal{M}(A)_f$ über R_f.

QED.

4.3 Nicht-singuläre Punkte 66

4.3.1 Bezeichnungen 66

Sei X eine irreduzible affine Varietät über dem algebraisch abgeschlossnenen Körper k. Wie bisher bezeichne

$$M_x := \{f \in k[X] \mid f(x) = 0\}$$

das Ideal der regulären Funktionen f: X $\xrightarrow[M]{}$ k mit einer Nullstelle in x. Für jeden Modul über dem Koordinatenring k[X] schreiben wir

$$M(x) := M/M_xM.$$

Sei $A = (a_{ij})$ eine m×n-Matrix deren Einträgen a_{ij} in k[X] liegen (wie in 4.2.13 B mit R := k[X]. Für jeden Punkt $x \in X$ bezeichne

$$A(x) = (a_{ij}(x))$$

die m×n-Matrix, deren Einträge gerade die Werten der Einträge von A an der Stelle x sind.

Bemerkungen

(i) Für jeden k[X]-Modul M und jeden Punkt $x \in M$ ist M(x) ein ein k-Vektorraum.

(ii) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Ein R-Modul M heißt lokal frei, wenn we für jedes maximale Ideal m von R ein Element $f \in R$-m gibt mit der Eigenschaft, daß der R_f-Modul M_f ein freier Modul ist. Dabei bezeichne der Index f den Übergang zum Quotienten-Ring bzw. Quotienten-Modul bezüglich der Potenzen von f.

(iii) Sind R = k[X] der Koordinatenring einer affinen Varietät und M ein endlich erzeugter lokal freier R-Modul, so kann man zeigen, daß M ein Vektorraumbündel über der Varietät X definiert, dessen Fasern gerade die Vektorräume M(x) mit $x \in X$ sind. (iv) Umgekehrt definiert ein Vektorraumbündel über dem topologischen Raum X, dessen Fasern endlich-dimensionale k-Vektorräume und dessen Überganfunktionen reguläre Abbildungen sind, einen lokal freien Modul über dem Koordinatenring k[X].

(v) Mit den Bezeichnungen von 4.2.13 B gilt für jede m×n-Matrix

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a^1 \\ \cdots \\ a^m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(k[X])$$

und jeden Punkt $x \in X$,

$$\mathcal{M}_{k[X]}{}^T(A) = k[X]^{1\times n} / \sum_{i=1}^{m} k[X]\cdot a^i$$

also

$$\mathcal{M}_{k[X]}{}^T(A)(x) = \mathcal{M}^T(A)/M_x\, \mathcal{M}^T(A)$$

$$= k[X]^{1\times n} / \sum_{i=1}^{m} k[X]\bullet(a^i) + M_x \bullet k[X]^{1\times n}$$

$$= (k[X]/M_x)^{1\times n} / (\sum_{i=1}^{m} k[X]\bullet(a^i) \bmod M_x \bullet k[X]^{1\times n})$$

Wir erinnern daran, daß die natürliche Abbildung $k[X] \longrightarrow k[X]/M_x \cong k$, identifiziert werden kann mit der Auswertung an der Stelle x,

$$k[X] \longrightarrow k, f \mapsto f(x)$$

(vgl. die Bemerkung von 1.3.2). Damit ist

$$\mathcal{M}_{k[X]}{}^T(A)(x) \cong k^{1\times n} / \sum_{i=1}^{m} k\bullet a^i(x) = \mathcal{M}^T{}_k(A(x)).$$

Wir transponieren sämtliche auftretenden Matrizen und erhalten

(vi) $\mathcal{M}_{k[X]}(A)(x) = \mathcal{M}_k(A(x))$.

4.3.2 Lemma: Der Rang von $\mathcal{M}_{k[X]}(A)(x)$ 66

Seien X eine irreduzible affine Varietät und $A \in M_{m,n}(k[X])$ eine m×n-Matrix mit Einträgen im Koordinatenring k[X] von X. Der Rang von A - betrachtet als Matrix mit Einträgen im Quotientenkörper k(X) von k[X] werde bezeichnet mit

$$r := \text{rk } A.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $\dim_{k(X)} \mathcal{M}_{k(X)}(A) = n - r$.

(ii) Für jeden Punkt $x \in X$ gilt

$$\dim_k \mathcal{M}_{k[X]} (A)(x) \geq n\text{-}r.$$

Die Menge der $x \in X$ mit $\dim_k \mathcal{M}_{k[X]} (A)(x) = n\text{-}r$ ist offen und nicht leer.

(iii) Für jedes $x \in X$ mit $\dim_k \mathcal{M}_{k[X]} (A)(x) = n\text{-}r$ gibt es ein $f \in k[X]$ mit $f(x) \neq 0$, für welches $\mathcal{M}_{k[X]}(A)_f$ ein freier $k[X]_f$ des Rangs n-r ist.

Beweis. Zu (i). Nach Definition vom $\mathcal{M}_R(A)$ in 4.2.13 B gilt

$$\begin{aligned}\dim_{k(X)} \mathcal{M}_{k(X)}(A) &= \dim_{k(X)} \mathcal{M}^T{}_{k(X)}(A)\\ &= \dim_{k(X)} k(X)^{1\times n} / \sum_{i=1}^{m} k(X)\bullet a^i\\ &= \dim_{k(X)} k(X)^{1\times n} - \dim_{k(X)} \sum_{i=1}^{m} k(X)\bullet a^i\\ &= n - \text{rk}(A)\end{aligned}$$

Zu (ii). Nach Voraussetzung ist die maximalen Anzahl von über k(X) linear unabhängigen Zeilen von A gleich r. Über k(X) linear unabhängige Zeilen von A sind es auch über k[X]. Jede lineare Abhängigkeit über k(X) zwischen Zeilen von A führt zu einer linearen Abhängigkeit über k[X] zwischen diesen Zeilen (man multipliziere mit einem gemeinsamen Nenner).
Deshalb ist die maximalen Anzahl von über k[X] linear unabhängigen Zeilen von A ebenfalls gleich r.

Die Determinante jeder (r+1)×(r+1)-Teilmatrix von A ist gleich dem Nullelement von k[X]. Durch Einsetzen eines Punktes $x \in X$ erhalten wir das Nullelement von k. Deshalb gilt

$$\mathrm{rk}\ A(x) \le r \text{ für jedes } x \in X.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\dim_k \mathcal{M}_{k[X]}(A)(x) &= \dim_k \mathcal{M}_{k[X]}{}^T(A)(x)\\ &= \dim_k k^{1\times n} - \dim_k \sum_{i=1}^{m} k\bullet(a^i(x)\\ &= n - \mathrm{rk}\ A(x)\\ &\ge n - r,\end{aligned}$$

d.h. es gilt der erste Teil von (ii).

Weiter gibt es eine r×r-Teilmatrix von A, deren Determinante ein von 0 verschiedenes Element von k[X] ist. Es gibt also einen Punkt $x \in X$, in welchem dieses Element ungleich Null ist. Damit ist

$$\mathrm{rk}\ A(x) = r$$

also

$$\dim_k \mathcal{M}_{k[X]}(A)(x) \quad = n - r$$

für diesen Punkt x. Die Menge der Punkte, in denen diese Gleichheitszeichen gilt (d.h. rk A(x) = r) ist damit nicht leer. Diese Menge ist gleich der Menge der Punkten $x \in X$, für welche eine r×r-Teilmatrix von A existiert, die in x eine von 0 verschiedene Determinante besizt. Damit ist diese Menge gleich der Vereinigung aller offenen Hauptmengen die zu den Determinanten der r×r-Teilmatrizen von A gehören. Als solche ist sie offen.

<u>Zu (iii)</u>. Sei $x \in X$ ein Punkt mit

$$\dim_k \mathcal{M}_{k[X]}(A)(x) = n\text{-}r.$$

Wie wir beim Beweis von (ii) gesehen haben, ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\mathrm{rk}\ A(x) = r. \tag{1}$$

Wir bezeichnen mit

$$\tilde{e}_i := e_i + \sum_{i=1}^{m} k[X]\bullet(a^i)^T$$

die Restklasse des Spaltenvektors $e_i \in k[X]^{n\times 1}$ in

$$\mathcal{M}_{k[X]}(A) = k[X]^{n\times 1} / \sum_{i=1}^{m} k[X]\bullet(a^i)^T$$

Wegen (1) gibt es r Zeilen $a^{i_1}(x),\dots,a^{i_r}(x)$ Zeilen von A(x), welche linear unabhängig über k sind. Wegen

$$(a^{i_\nu})^T = \sum_{j=1}^{n} a_{i_\nu,j}\bullet e_j \text{ für } \nu = 1,\dots,r$$

gilt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_\nu,j}\bullet \tilde{e}_j = 0 \text{ in } \mathcal{M}_{k[X]}. \text{ für } \nu = 1,\dots,r. \tag{2}$$

In Matrizenschreibweise hat das lineare Gleichungssystem (2) die Gestalt

$$\widetilde{A}\bullet\widetilde{e} = 0$$

Nach Wahl der i_ν hat die Matrix mit den Zeilen $a^{i_1}(x),\ldots,a^{i_r}(x)$ den Rang r. Sie besitzt also r linear über k unabhängige Spalten, sagen wir die Spalten mit den Indizes

$$j_1,\ldots,j_r$$

sind linear unabhängig über k. Das bedeutet, die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \ldots & a_{i_1,j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r,j_r} & \ldots & a_{i_r,j_r} \end{vmatrix}$$

ist an der Stelle x ungleich Null. Wir ändern die Reihenfolge der Summation in (2) derart, daß die Summanden zu $j = j_1,\ldots,j_r$ am Anfang stehen. Durch Multiplikation der Koeffizienten-Matrix

$$\widetilde{A} = (\widetilde{A}', \widetilde{A}'')$$

des Gleichungssystems mit dem Inversen der Matrix

$$\widetilde{A}' = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \ldots & a_{i_1,j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r,j_r} & \ldots & a_{i_r,j_r} \end{pmatrix}$$

erhalten wir ein Gleichungssystem mit einer Koeffizientenmatrix

$$\widetilde{A}'^{-1}\bullet\widetilde{A} = (\mathrm{Id}, \widetilde{A}'^{-1}\bullet\widetilde{A}''),$$

die in zwei Blöcke zerfällt, wobei der erste Block eine Einheitsmatrix ist. Wir können so die Vektoren $\widetilde{e}_{j_1},\ldots,\widetilde{e}_{j_r}$ als Linearkombinationen der übrigen $\widetilde{e}_j$, wobei die Koeffizienten Quotienten von Elementen aus k[X] sind und im Nenner Elemente von k[X] stehen, die in x ungleich Null sind. Sei $f \in k[X]$ das Produkt der auftretenden Nenner. Dann sind

$$\widetilde{e}_{j_1},\ldots,\widetilde{e}_{j_r} \text{ Linearkombinationen der übrigen } \widetilde{e}_j$$

mit Koeffizienten aus $k[X]_f$. Es folgt

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}_{k[X]}(A))_f &= \sum_{j=1}^{n} k[X]_f\bullet\widetilde{e}_j \\ &= \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}-\{j_1,\ldots,j_r\}} k[X]_f\bullet\widetilde{e}_j\end{aligned}$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß die n-r Erzeuger $\widetilde{e}_j$ linear unabhängig über $k[X]_f$ sind. Wir setzen

$$\{\ell_1,\ldots,\ell_{n-r}\} := \{1,\ldots,n\} - \{j_1,\ldots, j_r\}$$

und betrachten die surjektive $k[X]_f$-lineare Abbildung

$$\varphi : k[X]_f^{n-r} \twoheadrightarrow \sum_{\nu=1}^{n-r} k[X]_f \cdot \tilde{e}_{\ell_\nu}$$

Sie ist Teil einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow k[X]_f^{n-r} \xrightarrow{\varphi} \sum_{\nu=1}^{n-r} k[X]_f \cdot \tilde{e}_{\ell_\nu} \longrightarrow 0. \qquad (3)$$

Wir wenden den Quotienten-Funktor $k(X)\otimes_{k[X]_f}$ an und erhalten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow k(X)\otimes_{k[X]_f}\mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow k(X)^{n-r} \longrightarrow k(X)\otimes_{k[X]} \sum_{\nu=1}^{n-r} k[X]_f \cdot \tilde{e}_{\ell_\nu} \longrightarrow 0. \quad (4)$$

Wobei recht der Modul

$$\begin{aligned} k(X)\otimes_{k[X]_f}(\mathcal{M}_{k[X]}(A))_f &= k(X)\otimes_{k[X]_f} k[X]_f \otimes_{k[X]}\mathcal{M}_{k[X]}(A) \\ &= k(X)\otimes_{k[X]} \mathcal{M}_{k[X]}(A) \\ &= \mathcal{M}_{k(X)}(A) \end{aligned}$$

Nach (i) ist dies ein $k(X)$-Vektorraum der Dimension n-r. Die durch φ induzierte Abbildung von (4) ist deshalb ein Isomorphismus von $k(X)$-Vektorräumen. Es folgt

$$k(X)\otimes_{k[X]_f}\mathrm{Ker}(\varphi) = 0.$$

Links steht ein Quotientenmodul, genauer

$$0 = k(X)\otimes_{k[X]_f}\mathrm{Ker}(\varphi) = S^{-1}(\mathrm{Ker}(\varphi)) \text{ mit } S = k[X] - \{0\}$$

Jedes Element dieses Modul hat die Gestalt $\frac{m}{g} = 0 = \frac{0}{1}$ mit $m \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ und $g \in S$, d.h.

für jedes $m \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ gibt es ein $h \in S$ mit

$$0 = h\cdot(1\cdot m - g\cdot 0) = h\cdot m.$$

Wegen $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq k[X]_f^{n-r}$ und weil h ein $k[X]_f^{n-r}$-reguläres Element ist, folgt m = 0

(für jedes $m \in \mathrm{Ker}(\varphi)$). Wir haben gezeigt, $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$. Auf Grund der exakten Sequenz (3) ist

$$\mathcal{M}_{k[X]}(A))_f = \sum_{\nu=1}^{n-r} k[X]_f \cdot \tilde{e}_{\ell_\nu} \cong k[X]_f^{n-r}$$

ein freier $k[X]_f$-Modul des Rangs n-r.

QED.

4.3.3 Ω_X und T_xX in nicht-singulären Punkten 67

4.3.3 A Definition ***67***

Sei X eine affine Varietät. Dann heißt der k[X]-Modul

$$\Omega_X := \Omega_{\underline{k[X]/k}}$$

<u>Modul der Kähler-Differentiale</u> auf X oder <u>Modul der regulären Differentiale</u> auf X oder auch einfach <u>Differential-Modul</u> von X.

Bemerkungen

(i) Für jeden Punkt $x \in X$ ist der Tangentialraum von X im Punkt x kanonisch isomorph zu

$$\begin{aligned} T_x X &= Der_k(k[X], k_x) && \text{(Definition 4.1.3)} \\ &\cong Hom_{k[X]}(\Omega_X, k_x) && \text{(nach Bemerkung 4.2.2 (i)).} \end{aligned}$$

(ii) Weil der k[X]-Modul k_x vom Ideal $M_x \subseteq k[X]$ der in $x \in X$ verschwindenden regulären Funktionen annulliert wird, gilt für jeden k[X]-Modul M,

$$\begin{aligned} Hom_{k[X]}(M, k_x) &\cong Hom_{k[X]}(M/M_x M, k_x) \\ &= Hom_{k[X]}(M(x), k_x) && \text{(vgl. 4.3.1)} \\ &\cong Hom_{k[X]/M_x}(M(x), k_x) \\ &\cong Hom_k(M(x), k_x) \end{aligned}$$

(iii) Für jeden Punkt $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} T_x X &\cong Hom_{k[X]}(\Omega_X, k_x) && \text{(nach (i))} \\ &\cong Hom_k(\Omega_X(x), k_x) && \text{(nach (ii))} \end{aligned}$$

Die k-Vektorräume $T_x X$ und $\Omega_X(x)$ sind also dual zueinander. Das Dual des Tangentialraums

$$(T_x X)^* = Hom_k(T_x X, k_x) \cong \Omega_X(x)$$

heißt Kotangentialraum von X im Punkt x.

4.3.3B Satz: Eigenschaften ***67***

Sei X eine irreduzible Varietät der Dimension d. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Ist $x \in X$ ein nicht-singulärer Punkt, so gibt es eine affine offene Umgebung U von x mit der Eigenschaft, daß Ω_U ein freier k[U]-Modul ist mit einer Basis der Gestalt

$$dg_1, \dots, dg_d \text{ mit } g_1, \dots, g_d \in k[X].$$

(ii) Die Menge der nicht-singulären Punkte von X ist nicht-leer und offen in X.

(iii) Für jeden Punkt $x \in X$ gilt $\dim_k T_x X \geq d$.

Beweis. Zu (i). Wir können annehmen, X ist affin mit dem Koordinatenring

$$k[X] = k[T_1,\dots,T_m] / (f_1,\dots,f_n).$$

Nach 4.2.4 gilt

$$\begin{aligned} \Omega_X &= \Omega_{k[X]/k} \\ &\cong \sum_{i=1}^{m} k[X]\cdot dt_i / \sum_{j=1}^{n} k[X]\cdot(\sum_{i=1}^{m} (D_i f_j)(t)\cdot dt_i) \\ &\cong k[X]^m / \sum_{j=1}^{n} k[X]\cdot(\sum_{i=1}^{m} (D_i f_j)(t)\cdot e_i), \end{aligned}$$

wobei der letzte Isomorphismus dt_i mit dem i-ten Standard-Einheitsvektor e_i identifiziert. Sei

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a^1 \\ \dots \\ a^n \end{pmatrix}, \; a^j := (\sum_{i=1}^{m} (D_i f_j)(t) \cdot e_i)^T = ((D_1 f_j)(t), \dots, (D_m f_j)(t))$$

die n×m-Matrix mit Zeilen $a^1,\dots,a^m$, d.h.

$$a_{ij} = (D_j f_i)(t) \text{ für } i = 1,\dots,n \text{ und } j = 1,\dots,m.$$

Dann können wir die obige Isomorphie in der Gestalt

$$\Omega_X \quad = k[X]^m / \sum_{j=1}^{n} k[X] \cdot (a^j)^T = \mathcal{M}_{k[X]}(A) \tag{1}$$

(vgl. 4.2.13 B) schreiben. Wir wenden den exakten Funktor $\otimes_{k[X]} k(X)$ an und erhalten

$$\Omega_{k(X)/k} \cong \mathcal{M}_{k(X)}(A) \tag{2}$$

(vgl. 4.2.5 Aufgabe 3).

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \dim_k \Omega_{k(X)/k} &= \operatorname{trdeg}_k k(X) && \text{(nach 4.2.9 B (i) und (ii))} \\ &= \dim X. && \text{(nach 1.8.1.3)} \\ &= d && \text{(nach Definitoin von d).} \end{aligned}$$

Man beachte, die Körpererweiterung k(X)/k ist separabel erzeugt, weil k algebraisch abgeschlossen, also perfekt, ist (nach 4.2.10 B und den Bemerkungen 4.2.10 A (i) und (ii)). Nach 4.3.2(i) gilt

$$d = n - \operatorname{rk} A.$$

Weil $x \in X$ ein nicht-singulärer Punkt von X sein soll (und X irreduzibel ist) gilt

$$\begin{aligned} \dim X &= \dim_x X = \dim_k T_x X && \text{(vgl. 4.1.7)} \\ &= \dim_k \Omega_X(x) && \text{(nach Bemerkung 4.3.3 A (iii))} \\ &= \dim_k \Omega_{k[X]/k}(x) && \text{(nach Definition von } \Omega_X \text{ in 4.3.3 A)} \end{aligned}$$

also

$$n - \operatorname{rk} A = d = \dim_k \Omega_{k(X)/k} = \dim_k \Omega_{k[X]/k}(x), \tag{3}$$

Zusammen mit (1) und (2) bedeutet dies, daß die Bedinung (iii) von 4.3.2 (iii) erfüllt ist, d.h. es gibt ein $f \in k[X]$ mit $f(x) \neq 0$ derart, daß

$$(\Omega_{k[X]/k})_f \text{ ein freier } k[X]_f\text{-Modul vom Rang d}$$

ist. Nach 4.2.5 Aufgabe 5 ist

$$(\Omega_{k[X]/k})_f = \Omega_{k[X]_f/k} = \Omega_{k[U]/k} = \Omega_U,$$

wenn U die offene Hauptmenge D(f) bezeichnet. Wegen $f(x) \neq 0$ gilt $x \in D(f) = U$. Es gibt also eine offene affine Umgebung U von x derart, daß Ω_U ein freier k[U]-Modul vom Rang d ist. Weil Ω_U auch von endlich vielen Elementen der Gestalt

$$dg \text{ mit } g \in k[U]$$

erzeugt wird (nach Bemerkung 4.2.1 (iii)) und einige dieser Differentiale eine Basis von

$$\Omega_U \otimes_{k[U]} k(U)$$

über k(U) bilden, kann man U so verkleinern (zu einer Umgebung von x), daß bereits einige der dg eine Basis von Ω_U über k[U] bilden (vgl. 4.2.15). Damit gilt (i).

Zu (ii). Wir haben zu zeigen, für jede nicht-singulären Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x derart, daß alle Punkt von U nicht-singulär sind. Nach (i) gibt es eine affine offen Umgebung U von x derart, daß

$$\Omega_U \text{ ein freier } k[U]\text{-Modul vom Rang } d = \dim X \;(=^{12} \dim U)$$

ist. Für jedes $y \in U$ ist

$$\Omega_U(y) = \Omega_U/M_y \cdot \Omega_U$$

ein Vektorraum über $k[U]/M_y = k$ der Dimension $d = \dim U$. Nach Bemerkung 4.3.3 A (iii) ist

$$\dim_k T_y U = \dim_k \Omega_U(y) = \dim U,$$

d.h. $y \in U$ ist ein nicht-singulärer Punkt von U (vgl. 4.1.7) und damit von X (ebenfalls 4.1.7).

Zu (iii). Für jedes $x \in X$ gibt es eine affine offene Umgebung von x mit

$$\begin{aligned}
\dim_k T_x X &= \dim_k T_x U && \text{(nach 4.1.7)}\\
&= \dim_k \Omega_U(x) && \text{(nach Bemerkung 4.3.3 A (iii).}\\
&= \dim_k \mathcal{M}_{k[X]}(A)(x) && \text{(nach (1))}\\
&\ge \dim_{k(X)} \mathcal{M}_{k(X)}(A) && \text{(nach 4.3.2 (ii) und (i)).}
\end{aligned}$$

Nach (ii) gibt es einen nicht-singulären Punkt $x_0 \in X$ und nach (3) gilt für diesem Punkt

$$\dim_{k(X)} \mathcal{M}_{k(X)}(A) = \dim_k \mathcal{M}_{k[X]}(A)(x_0).$$

Die eben für beliebiges $x \in X$ ausgeführte Rechnung ist natürlich auch für $x = x_0$ korrekt, sodaß

$$\dim_k T_x X \quad \ge \dim_k \mathcal{M}_{k[X]}(A)(x_0) = \dim_k T_{x_0} X.$$

Weil x_0 nicht-singulär ist, steht rechts $d = \dim X$, d.h. es ist

$$\dim_k T_x X \quad \ge d.$$

wie behauptet.
QED.

4.3.4 Aufgaben 67

4.3.4 Aufgabe 1 *67*

Zeigen Sie, die Funktionen $g_1,...,g_d$ von 4.3.3 B (i) sind algebraisch unabhängig.

Beweis. Nach Wahl der g_i gilt

$$\Omega_{k[U]/k} = k[U]\cdot dg_1 + ... + k[U]\cdot dg_d \text{ mit } d = \dim X$$

für eine affine offene Teilmenge U von X, wobei die Summe auf der rechte Seite direkt ist. Wir wendenden Funktor $\otimes_{k[U]} k(X)$ an und erhalten (vgl. 4.2.5 Aufgabe 3)

$$\Omega_{k(X)/k} = k(X)\cdot dg_1 + ... + k(X)\cdot dg_d \tag{1}$$

---

[12] X und U sind irreduzible affine Varietäten, deren Koordinatenringe denselben Quotientenkörper $k(X) = k(U)$ haben (mit demselben Transzendenzgrad über k).

mit

$$dg_1, \ldots , dg_d \text{ linear unabhängig über } k(X).$$

Wie im Beweis von 4.3.3 B (i) ist

$$\begin{aligned} \dim_k \Omega_{k(X)/k} &= \mathrm{trdeg}_k\, k(X) \quad \text{(nach 4.2.9 B (i) und (ii))} \\ &= \dim X. \quad \text{(nach 1.8.1.3)} \end{aligned} \tag{2}$$

Man beachte, die Körpererweiterung k(X)/k ist separabel erzeugt, weil k algebraisch abgeschlossen, also perfekt, ist (nach 4.2.10 B und den Bemerkungen 4.2.10 A (i) und (ii)).

Sei E der Teilkörper

$$E := k(g_1,\ldots,g_d) \ (\subseteq k(X)).$$

Mit

$$R := k[g_1,\ldots,g_d]$$

gilt

$$\Omega_{E/k} = E\otimes_R \Omega_{R/k}$$

(nach 4.2.5 Aufgabe 3) und

$$\Omega_{R/k} = R\bullet dg_1+\ldots+R\bullet dg_d$$

(nach 4.2.5 Aufgabe4), also

$$\Omega_{E/k} = E\bullet dg_1+\ldots+E\bullet dg_d. \tag{3}$$

Wir betrachten die erste fundamentale exakte Sequenz für $k \hookrightarrow E \hookrightarrow k(X)$:

$$\Omega_{E/k}\otimes_E k(X) \xrightarrow{\alpha} \Omega_{k(X)/k} \xrightarrow{\beta} \Omega_{k(X)/E} \longrightarrow 0$$

Auf Grund von (1) und (3) ist α surjektiv, also $\Omega_{k(X)/E} = 0$. Nach 4.2.9 B (i) ist

$$k(X)/E \text{ eine algbraische Körpererweiterung}$$

(die nach 4.2.9 B (ii) separabel algebraisch ist). Weiter gilt

$$\begin{aligned} d &= \dim_k \Omega_{k(X)/k} && \text{(wegen (1))} \\ &= \mathrm{trdeg}_k\, k(X) && \text{(nach (2))} \\ &= \mathrm{trdeg}_k\, E && \text{(weil } k(X)/E \text{ algebraisch ist)} \\ &= \mathrm{trdeg}_k\, k(g_1,\ldots,g_d) && \text{(nach Definiton von E).} \end{aligned}$$

Also sind $g_1,\ldots,g_d$ algebraisch unabhängig über k.

QED.

4.3.4 Aufgabe 2 *67*

Sei X eine affine Varietät, für welche Ω_X ein freier k[X]-Modul ist. Zeigen sie, alle Punkte von X sind nicht-singulär.

Beweis. Sei Ω_X frei vom Rang r über k[X]. Dann gilt für jeden Punkt $x \in X$

$$\begin{aligned} r &= \dim_k \Omega_X(x) && \text{(nach Definition von M(x) in 4.3.1)} \\ &= \dim_k T_x X && \text{(nach Bemerkung 4.3.3 A (iii)).} \end{aligned}$$

Die Dimension des k-Vektorraums $T_x X$ ist somit unabhängig von der speziellen Wahl des Pumkes $x \in X$. Nach 4.3.3 B (ii) ist für jede Komponente von X die Menge der nicht-singulären Punkte nicht-leer und offen in dieser Komponente. Insbesondere gibt es auf jeder Komponente C von X einen nicht-singulären Punkt x_0 dieser Komponente, der in keiner anderen Komponente liegt. Dieser Punkt ist auch ein nicht-singulärer Punkt von X, d.h. es gilt

$$r = \dim_k T_{x_0} X = \dim_{x_0} X = \dim C.$$

Insbesondere haben alle Komponenten von X dieselbe Dimension r, und es gilt auch

$$r = \dim X.$$

Damit ist

$$\dim_k T_x X = r = \dim X \text{ für jedes } x \in X.$$

Wir haben gezeigt, jeder Punkt von X ist ein nicht-singulärer Punkt.
QED.

4.3.5 Dominante und separable Morphismen 67

Eine reguläre Abbildung $\phi: X \longrightarrow Y$ von irreduziblen algebraischen Varietäten heißt dominant, wenn $\phi(X)$ dicht liegt in Y.

Bemerkungen

(i) Sei $\phi: X \longrightarrow Y$ eine reguläre Abbildung irreduzibler affiner Varietäten. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.
   (a) ϕ ist dominant.
   (b) Der induzierte k-Algebra-Homomorphismus
   $$\phi^*: k[Y] \longrightarrow k[X],\ f \mapsto f\circ\phi,$$
   ist injektiv.

(ii) Sei $\phi: X \longrightarrow Y$ eine dominante reguläre Abbildung irreduzibler algebraischer Varietäten. Dann induziert ϕ einen injektive k-Algebra-Homomorphismus ϕ^*: $k(Y) \hookrightarrow k(X)$. Die Abbildung ϕ heißt separabel, wenn k(X) eine separabel erzeugte Körpererweiterung von k(Y) ist.

(iii) Sei $\phi: X \longrightarrow Y$ eine reguläre Abbildung affiner algebraischer Varietäten. Dann definiert der k-Algebra-Homomorphismus
$$\phi^*: k[Y] \longrightarrow k[X],\ f \mapsto f\circ\phi,$$
die k[Y]-lineare Abbildung
$$(\phi^*)^0: \Omega_Y \longrightarrow \Omega_X,\ d_Y(f) \mapsto d_X(\phi^*(f)). \qquad (1)$$
(vgl. 4.2.3). Weil Ω_X ein k[X]-Modul ist, definiert die Multiplikation mit Elementen aus k[X] eine über k[Y] bilineare Abbildung
$$\Omega_Y \times k[X] \longrightarrow \Omega_X,\ (\omega, f) \mapsto f\bullet (\phi^*)^0(\omega),$$
und damit eine k[X]-lineare Abbildung
$$\Omega_Y \otimes_{k[Y]} k[X] \longrightarrow \Omega_X,\ \omega\otimes f \mapsto f\bullet (\phi^*)^0(\omega). \qquad (2)$$
Für jeden Punkt $x \in X$ sei
$$k_x$$
wie in 4.1.2 B und 4.1.3 der Körper k mit der k[X]-Modul-Struktur
$$f\bullet c := f(x)\bullet c \text{ für } f \in k[X] \text{ und } c \in k.$$
Durch den k-Algebra-Homomorphismus $\phi^*: k[Y] \longrightarrow k[X]$ wird k_x auch zum k[Y]-Modul, genauer zum k[Y]-Modul $k_{\phi(x)}$, denn für

$$f \in k[Y] \text{ und } c \in k$$

gilt

$$f\bullet c := \phi^*(f)\bullet c = (f\circ\phi)\bullet c = (f\circ\phi)(x)\bullet c = f(\phi(x))\bullet c.$$

Die Abbildung (2) induziert deshalb die k-lineare Abbildung

$$((\phi^*)^0)^*\colon \mathrm{Hom}_{k[X]}(\Omega_X, k_x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k[Y]}(\Omega_Y, k_{\phi(x)}). \qquad (3)$$

$$\ell \mapsto (\omega \mapsto \ell((\phi^*)^0(\omega)))$$

Die k-lineare Abbildung (3) bis auf Isomorphie das Dual

$$\mathrm{Hom}_k(\Omega_X(x), k_x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\Omega_Y(\phi(x)), k_{\phi(x)}), \qquad (4)$$

der k-linearen Abbildung

$$(\phi^*)^0(x) := (\phi^*)^0\colon \Omega_Y(\phi(x)) \longrightarrow \Omega_X(x),$$

für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Omega_Y & \xrightarrow{(\phi^*)^0} & \Omega_X \\ \sigma\downarrow & & \downarrow\rho \\ \Omega_Y(\phi(x)) & \xrightarrow{(\phi^*)^0(x)} & \Omega_X(x) \end{array} \qquad (5)$$

kommutativ wird. Dabei seien die vertikalen Abbildungen die natürlichen Abbildungen auf den jeweiligen Faktor-Modul.

(iv) Für jede reguläre Abbildung $\phi\colon X \longrightarrow Y$ affiner algebraischer Varietäten bestehen für $x \in X$ natürliche Isomorphismen (vgl. 4.2.2 (i) und 4.3.3 A (i))

$$\mathrm{Hom}_{k[X]}(\Omega_X, k_x) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_k(k[X], k_x) = T_x X, \ell \mapsto \ell\circ d_X,$$

und analog

$$\mathrm{Hom}_{k[Y]}(\Omega_Y, k_{\phi(x)}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_k(k[Y], k_{\phi(x)}) = T_{\phi(x)} Y, \ell \mapsto \ell\circ d_y.$$

Verwenden wir diese Isomorphismen um die Tangentialräume mit den entsprechenden Hom-Mengen zu identifizieren, so wird die Abbildung (3) von (iii) gerade mit dem in 4.1.3 definierten Differential

$$d\phi_x\colon T_x X \longrightarrow T_{\phi(x)} Y$$

der regulären Abbildung $\phi\colon X \longrightarrow Y$ im Punkt x identifiziert (und entsprechend auch die Abbildung (4)), d.h. $d\phi_x$ und

$$(\phi^*)^0(x)\colon \Omega_Y(\phi(x)) \longrightarrow \Omega_X(x)$$

sind zueinander duale lineare Abbildungen.

Beweis. Zu (i). (a) $\Rightarrow$ (b). Sei ϕ dominant und seien $f,g \in k[X]$ zwei reguläre Abbildungen mit $f\circ\phi = g\circ\phi$. Dann sind

$$f, g\colon Y \longrightarrow \mathbb{A}^1$$

zwei reguläre Abbildung, die in jedem Punkt von $\phi(X)$ denselben Wert haben. Weil $\phi(X)$ eine dicht liegende Teilmenge von Y ist und Y eine Varietät ist, gilt

$$f = g.$$

(nach 1.6.11). Wir haben gezeigt, ϕ^* ist injektiv.

(b) $\Rightarrow$ (a). Angenommen, ϕ ist nicht dominant. Dann ist

$$\overline{\phi(X)} \subset X$$

eine echte abgeschlossene Teilmenge von X. Es gibt also eine von 0 verschiedene reguläre Funktion

$$f: X \longrightarrow k,\ f \neq 0,$$

welche identisch 0 ist auf $\overline{\phi(X)}$. Insbesondere ist

$$\phi^*(f) = 0 = \phi^*(0).$$

Mit anderen Worten ϕ^* ist nicht injektiv.

Zu (ii). Wir wählen eine nicht-leere affine offene Teilmenge $V \subseteq Y$. Dann ist $\phi^{-1}(V)$ eine nicht-leere offene Teilmenge von X, welche eine nicht-leere affine offene Teilmenge

$$U \subseteq \phi^{-1}(V)$$

enthält, also einen Morphismus von irreduziblen affinen Varietäten

$$\phi|_U : U \longrightarrow V$$

induziert. Nach (i) ist

$$(\phi|_U)^*: k[V] \longrightarrow k[U]$$

ein injektiver k-Algebra-Homomorphismus. Weil X und Y (und damit auch U und V) irreduzibel sind, haben die Koordinatenringe k[V] und k[U] keine Nullteiler. Die Injektion $(\phi|_U)^*$ induziert eine Injektion der Quotientenkörper

$$\phi^*: k(Y) := Q(k[V]) \longrightarrow Q(k[U]) = k(X).$$

Zu (iii). Weil Ω_X ein k[X]-Modul ist, induziert $(\phi^*)^0$ die k[X]-lineare Abbildung

$$k[X]\otimes_{k[Y]}\Omega_Y \longrightarrow \Omega_X,\ f'\otimes d_Y(f'') \mapsto \phi^*(f')\bullet d_X(\phi^*(f'')).$$

Wir wenden den Funktor $\mathrm{Hom}_{k[X]}(\ ?\ , k_x)$ auf die k[X]-lineare Abbildung (2) an und erhalten die k-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{k[X]}(\Omega_X, k_x) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{k[X]}(\Omega_Y\otimes_{k[Y]} k[X], k_x) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{k[Y]}(\Omega_Y, k_{\phi(x)}) \\ \ell & \mapsto & (\omega\otimes f \mapsto \ell(f\bullet (\phi^*)^0(\omega)) & \mapsto & (\omega \mapsto \ell((\phi^*)^0(\omega))) \end{array}$$

Dies ist gerade die Abbildung $((\phi^*)^0)^*$, welche induziert wird durch die k[Y]-lineare Abbildung (1), d.h. die Abbildung (3).

Weil der k[X]-Modul k_x vom Ideal M_x der in x verschwindenden Funktionen annulliert wird, induziert für jeden k[X]-Modul M der natürliche Homomorphismus

$$\rho: M \longrightarrow M/M_xM = M(x)$$

auf den Faktormodul einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_k(M(x), k_x) \cong \mathrm{Hom}_{k[X]}(M , k_x),\ \ell \mapsto \ell\circ\rho,$$

Analog induziert für jeden k[Y]-Modul N der natürliche Homomorphismus

$$\sigma: N \longrightarrow N(\phi(x))$$

einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{k[Y]}(N , k_{\phi(x)}) \cong \mathrm{Hom}_k(N(\phi(x)), k_{\phi(x)}),\ \ell \mapsto \ell\circ\sigma.$$

Die lineare Abbildung von (3) bekommt so die Gestalt

$$\mathrm{Hom}_k(\Omega_X(x), k_x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\Omega_Y(\phi(x)), k_{\phi(x)}).$$

Es ist gerade die k-lineare Abbildung, welche induziert wird durch die k-lineare Abbildung

$$(\phi^*)^0(x)\colon \Omega_Y(\phi(x)) \longrightarrow \Omega_X(x),$$

für welche das Diagramm (5) kommutativ wird.
Zu (iv). Nach Definition des Tangentialraums in 4.1.3 gilt

$$T_x X = \mathrm{Der}_k(k[X], k_x) \text{ und } T_{\phi(x)} Y = \mathrm{Der}_k(k[Y], k_{\phi(x)})$$

und das Differential von $\phi\colon X \longrightarrow Y$ im Punkt $x \in X$ ist definiert als die k-lineare Abbildung

$$d\phi_x = (\phi^*)_0\colon \mathrm{Der}_k(k[X], k_x) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[Y], k_{\phi(x)}),\ D \mapsto D\circ(\phi^*)$$

(vgl. 4.1.3). Betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{k[X]}(\Omega_{k[X]/k}, k_x) \arrow[r, "\cong", "\alpha"'] \arrow[d, "((\phi^*)^0)^*"'] & \mathrm{Der}_k(k[X], k_x) \arrow[d, "d\phi_x"] \\
\mathrm{Hom}_{k[Y]}(\Omega_{k[Y]}, k_{\phi(x)}) \arrow[r, "\cong", "\beta"'] & \mathrm{Der}_k(k[Y], k)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\ell \arrow[r, mapsto, "\ell \mapsto \ell\circ d_X"] \arrow[d, mapsto] & D \arrow[d, mapsto] \\
\ell\circ(\phi^*)^0 \arrow[r, mapsto, "\ell \mapsto \ell\circ d_Y"'] & D\circ(\phi^*)
\end{tikzcd}$$

dessen horizontale Abbildungen die natürlichen Isomorphismen von Bemerkung 4.2.2 (i) sind. Die linke vertikale Abbildung (3) Bemerkung (iii) (also induziert durch (1)) und die rechte vertikale Abbildung sei das Differential von ϕ im Punkt x. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, dieses Diagramm ist kommutativ.
Für jedes

$$\ell \in \mathrm{Hom}_{k[X]}(\Omega_{k[X]/k}, k_x)$$

gilt

$$\begin{aligned}
(d\phi)_x(\alpha(\ell)) &= (d\phi)_x(\ell\circ d_X) && \text{(Definition von } \alpha) \\
&= \ell\circ d_X\circ(\phi^*) && \text{(Definition von } (d\phi)_x)
\end{aligned}$$

Nach 4.2.3 induziert der k-Algebra-Homomorphismus $\phi^*\colon k[Y] \longrightarrow k[X]$ die über k[Y] lineare Abbildung

$$(\phi^*)^0\colon \Omega_Y \longrightarrow \Omega_X,\ d_Y(f) \mapsto d_X(\phi^*(f)),$$

welche durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
k[Y] \arrow[r, "\phi^*"] \arrow[d, "d_Y"'] & k[X] \arrow[d, "d_X"] \\
\Omega_{k[Y]/k} \arrow[r, "(\phi^*)^0"] & \Omega_{k[X]/k}
\end{tikzcd}$$

festgelegt ist. Es gilt also $d_X\circ(\phi^*) = (\phi^*)^0\circ d_Y$. Wir setzen ein und erhalten

$$\begin{aligned}
(d\phi)_x(\alpha(\ell)) &= \ell\circ(\phi^*)^0\circ d_Y \\
&= \beta(\ell\circ(\phi^*)^0) && \text{(Definition von } \beta) \\
&= \beta(((\phi^*)^0)^*(\ell)) && \text{(Definition von } ((\phi^*)^0)^*
\end{aligned}$$

Weil dies für jedes ℓ gilt, folgt

$$(d\phi)_x\circ\alpha = \beta\circ((\phi^*)^0)^*.$$

Das Diagramm ist somit kommutativ.
QED.

4.3.6 Satz: dominante und separable Morphismen 68

Sei ϕ: X $\longrightarrow$ Y eine reguläre Abbildung von irreduziblen Varietäten. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Sei $x \in X$ ein nicht-singulärer Punkt von X, dessen Bild $\phi(x) \in Y$ ein nicht-singulärer Punkt von Y ist. Weiter sei das Differential von ϕ in x surjektiv,

$$d\phi_x: T_x X \twoheadrightarrow T_{\phi(x)} Y.$$

Dann ist ϕ dominant und separabel.

(ii) Sei ϕ dominant und separabel. Dann ist die Menge

$\{x \in X \mid x$ nicht-singular in X, $\phi(x)$ nicht-singulär in Y und $d\phi_x$ surjektiv$\}$

nicht-leer und offen.

Beweis.1. Schritt. Für jede nicht-leere offene Teilmenge $X' \subseteq X$ und jede nicht-leere offene Teilmenge $Y' \subseteq Y$ enthält der Durchschnitt $X' \bigcap \phi^{-1}(Y')$ einen nicht-singulären Punkt von X, dessen Bild bei ϕ ein nicht-singulärer Punkt von Y ist.

Wir können X' durch den Durchschnitt mit der Menge der nicht-singulären Punkte von X ersetzen und Y' durch den Durchschnitt mit der Menge der nicht-singulären Punkte von Y. Diese Durchschnitte sind wieder offene Teilmengen von X bzw. Y, und sie sind nicht-leer, weil X und Y irreduzibel sind (vgl. 4.3.3 B (ii)). Damit ist auch $\phi^{-1}(Y')$ nicht leer und offen in X, also ist auch

$$X' \bigcap \phi^{-1}(Y')$$

nicht leer. Weil in X' und Y' keine singulären Punkte liegen, hat jeder Punkt aus diesem Durchschnitt die geforderte Eigenschaft.

2. <u>Schritt</u>. Für jeden nicht-singulären Punkt $x \in X$ mit $\phi(x)$ nicht-singulär gibt es offene Umgebungen $U \subseteq X$ von x und $V \subseteq Y$ von $\phi(x)$ mit

$$\phi(U) \subseteq V$$

und derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. U und V sind affin und glatt.
2. Ω_U ist ein freier k[U]-Modul vom Rang d := dim U = dim X.
3. Ω_V ist ein freier k[V]-Modul vom Rang e := dim V = dim Y.

Ist die Einschränkung $\phi|_U$: U $\longrightarrow$ V dominant, so ist auch ϕ dominant.

Ist die Einschränkung $\phi|_U$: U $\longrightarrow$ V dominant und separabel, so auch ϕ.

Seien $V \subseteq Y$ eine affine offene Umgebung von $\phi(x)$ und $U \subseteq \phi^{-1}(V)$ eine affine offene Umgebung von x. Nach 4.3.3 B (i) und (ii) können wir U und V so klein wählen, daß die Bedinungen 1-3 erfüllt sind.

Sei $\phi|_U$: U $\longrightarrow$ V dominant. Dann ist $\phi(U)$ eine in V dicht liegende Teilmenge. Für jede nicht-leere offene Teilmenge V' von Y ist auch $V \bigcap V'$ nicht leer und offen (weil Y irreduzibel ist), also ist $\phi(U) \cap V \cap V'$ nicht leer (weil $\phi(U)$ dicht liegt in V). Erst recht ist dann auch

$$\phi(X) \cap V'$$

nicht leer. Weil dies für jede nicht-leere offene Teilmenge V' von Y gilt, liegt $\phi(X)$ dicht in Y. Wir haben gezeigt, daß mit $\phi|_U$ auch ϕ dominant ist.

Sei jetzt $\phi|_U$ dominant und separabel. Dann ist k(U) eine separabel erzeugte Körpererweiterung von k(V). Nach Definition des rationalen Funktionenkörpers einer irreduziblen Varietät ist aber

$$k(X) = k(U) \text{ und } k(Y) = k(V)$$

(vgl. 1.8.1.1), d.h. k(X) ist eine separabel erzeugte Körpererweiterung von k(Y), d.h. ϕ ist separabel (vgl. Bemerkung 4.3.5 (ii)).

3. Schritt.

(a) Sei $x \in X$ ein Punkt mit den folgenden Eigenschaften.
1. x ist nicbt-singulärer Punkt von X.
2. $\phi(x)$ ist nicht-singulärer Punkt von Y.
3. $d\phi_x: T_xX \longrightarrow T_{\phi(x)}Y$ ist surjektiv.

Dann gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq X$ von x mit der Eigenschaft, daß

$$d\phi_{x'}: T_{x'}X \longrightarrow T_{\phi(x')}Y$$

surjektiv ist für alle $x' \in W$.

(b) Ist unter den Bedingungen von (a) der Morphismus ϕ dominant, so ist ϕ sogar separabel.

(c) Ist ϕ ein separabler dominanter Morphismus, so gibt es einen Punkt $x \in X$, für welchen die Bedingungen 1-3 von (a) erfüllt sind.

Zu (a) und (b). Wir können X und Y durch die nach dem zweiten Schritt existierenden offenen Umgebung U bzw. V ersetzen und ϕ durch die Einschränkung $\phi|_U: U \longrightarrow V$, und damit annehmen, daß die Zusatzbedingungen 1-3 des zweiten Schritts erfüllt sind für U = X und V = Y.

Wir betrachten die durch $\phi: X \longrightarrow Y$ induzierte k[Y]-lineare Abbildung (2) von Bemerkung 4.3.5 (ii),

$$(\phi^*)^0: \Omega_Y \longrightarrow \Omega_X,\ d_Y(f) \mapsto d_X(\phi^*(f)). \tag{1}$$

und die zugehörige k[X]-lineare Abbildung (3) von 4.3.5 (ii),

$$\psi: \Omega_Y \otimes_{k[Y]} k[X] \longrightarrow \Omega_X,\ \omega \otimes f \mapsto f \bullet (\phi^*)^0(\omega).$$

derselben Bemerkung. Letztere bildet freie k[X]-Moduln endlichen Rangs ineinander ab. Indem wir Basen dieser Moduln fixieren, können wir ψ durch eine d×e-Matrix

$$A \in M_{d,e}(k[X])$$

mit Einträgen aus k[X] beschreiben. Als d×e-Matrix mit Einträgen in k(X) hat A einen Rang ≤ e,

$$\text{rk } A \le e.$$

Für jeden Punkt

$$x' \in X$$

können wir den Funktor $\otimes_{k[X]} k_{x'}$ auf ψ anwenden und erhalten die k-lineare Abbildung

$$(\phi^*)^0(x'): \Omega_Y(\phi(x')) \cong \Omega_Y \otimes_{k[Y]} k_{x'} \longrightarrow \Omega_X(x'), \tag{2}$$

(von Bemerkung 4.3.5(iii)), welche durch die Matrix A(x') gegeben ist. Das Dual dieser Abbildung ist nach Bemerkung 4.3.5 (iv) gerade das Differential $d\phi_{x'}$ von ϕ im Punkt x'. Dieses Differential ist für x' = x nach Voraussetzung surjektiv. Also ist das Dual (2) des Differentials für x' = x injektiv. Die d×e-Matrix A(x) hat deshalb den maximalen Rang

$$\mathrm{rk}\, A(x) = e. \tag{3}$$

Es gibt eine e×e-Teilmatrix von A mit von Null verschiedener Determinante im Punkt x. Diese Determinante ist auch in einer offenen Umgebung, sagen wir

$$x \in W \subseteq X, W \text{ offen}$$

von Null verschieden, d.h. es gilt

$$\mathrm{rk}\, A(x') = e \text{ für alle } x' \in W.$$

Weil die Matrix der k-linearen Abbildung (2) bezüglich der fixierten Basis gleich A(x') ist, und der Rang von A(x') für x' ∈ W gleich e ist, ist (2) injektiv für diese Punkte x',

$$(2) \text{ ist injektiv für jedes } x' \in W.$$

Das Dual von (2) ist folglich für diese Punkte x' surjektiv,

$$d\phi_{x'}: T_{x'}X \longrightarrow T_{\phi(x')}Y \text{ ist surjektiv für jedes } x' \in W.$$

Damit ist Aussage (a) des dritten Schritts bewiesen.

Wir nehmen jetzt zusätzlich an, daß $\phi: X \longrightarrow Y$ dominant ist.

Für beliebige Punkte x' ∈ X gilt rk A(x') ≤ rk A (vgl. zum Beispiel den Anfang des Beweises von 4.3.2 (ii)). Wegen (3) hat die d×e-Matrix A den Rang

$$\mathrm{rk}\, A = e.$$

Insbesondere ist die durch A definierte k[X]-lineare Abbildung

$$\psi: \Omega_Y \otimes_{k[Y]} k[X] \longrightarrow \Omega_X,\ \omega \otimes f \mapsto f \bullet (\phi^*)^0(\omega),$$

injektiv. Wir wenden den exakten Funktor $\otimes_{k[X]} k(X)$ an und erhalten die Injektiviät von

$$\Omega_Y \otimes_{k[Y]} k(X) \longrightarrow \Omega_{k(X)/k},\ \omega \otimes f \mapsto f \bullet (\phi^*)^0(\omega), \tag{4}$$

(vgl. 4.2.5 Aufgabe 3). Weil ϕ dominant sein soll, können wir k(Y) als Teilkörper von k(X) auffassen, k(X) mit $k(Y) \otimes_{k(Y)} k(X)$ identifizieren und den Definitionsbereich von (4) mit

$$\begin{aligned} \Omega_Y \otimes_{k[Y]} k(X) &= \Omega_Y \otimes_{k[Y]} k(Y) \otimes_{k(Y)} k(X) \\ &= \Omega_{k(Y)/k} \qquad \text{(vgl. 4.2.5 Aufgabe 3)} \end{aligned}$$

Dadurch bekommt die injektive Abbildung (4) die Gestalt

$$\Omega_{k(Y)/k} \otimes_{k(Y)} k(X) \longrightarrow \Omega_{k(X)/k},\ \omega \otimes f'' \mapsto f'' \bullet d_{k(X)/k}.$$

Dies ist gerade der Homomorphismus α der ersten fundamentalen exakten Sequenz 4.2.6 zu den Körpererweiterungen $k \hookrightarrow k(Y) \hookrightarrow k(X)$. Nach 4.2.11 ist die Körpererweiterung k(X)/k(Y) separabel erzeugt, also $\phi: X \longrightarrow Y$ ein separabler Morphismus (vgl. Bemerkung 4.3.5(ii)).

<u>Zu (c)</u>. Sei jetzt ϕ ein separabler dominanter Morphismus. Nach dem ersten Schritt gibt es einen nicht-singulären Punkt $x \in X$ mit $\phi(x)$ nicht-singulär in Y. Nach dem zweiten Schritt gibt es offene Umgebungen $U \subseteq X$ von x und $V \subseteq Y$ von $\phi(x)$ mit

$$\phi(U) \subseteq V$$

und derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. U und V sind affin und glatt.
2. Ω_U ist ein freier $k[U]$-Modul vom Rang $d := \dim U = \dim X$.
3. Ω_V ist ein freier $k[V]$-Modul vom Rang $e := \dim V = \dim Y$.

Für jede nicht-leere offene Teilmenge V' von V ist $\phi(X) \cap V'$ nicht leer (weil ϕ dominant ist). Also ist $\phi^{-1}(V')$ eine nicht leere offene Teilmenge von X. Weil X irreduzibel ist, ist auch $U \cap \phi^{-1}(V')$ nicht leer, d.h. auch

$$\phi(U) \cap V' \neq \emptyset.$$

Da dies für alle nicht-leeren offenen Teilmengen V' von V gilt, ist die Einschränkung

$$\phi|_U : U \longrightarrow V$$

dominant. Weil ϕ separabel ist, ist $k(X)$ eine separabel erzeugte Körpererweiterung von $k(Y)$ (vgl. Bemerkung 4.3.5 (ii)). Wegen $k(X) = k(U)$ und $k(Y) = k(V)$ (vgl. 1.8.1.1) gilt dasselbe für $k(U)$ über $k(V)$. Also ist auch $\phi|_U$ separabler dominanter Morphismus.

Wir können also zum Beweis von (c) den Morphismus ϕ durch die Einschränkung $\phi|_U$ ersetzen und annehmen, es gilt

1. X und Y sind affin und glatt.
2. Ω_X ist ein freier $k[X]$-Modul vom Rang $d = \dim X$.
3. Ω_Y ist ein freier $k[Y]$-Modul vom Rang $e = \dim Y$.

Nach 4.2.11 ist der linke Homomorphismus

$$\alpha: \Omega_{k(Y)/k} \otimes_{k(Y)} k(X) \longrightarrow \Omega_{k(X)/k}$$

der fundamentalen ersten Sequenz 4.2.6 zu den Körpererweiterungen

$$k \hookrightarrow k(Y) \hookrightarrow k(X)$$

injektiv. Betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{k(Y)/k} \otimes_{k(Y)} k(X) \arrow[r, "\alpha"] & \Omega_{k(X)/k} & d_{k(Y)/k}(g) \otimes f \arrow[r, mapsto] & d_{k(X)/k}(\phi^*(g)) \\
\Omega_{k[Y]/k} \otimes_{k[Y]} k[X] \arrow[r, "\psi"] \arrow[u] & \Omega_{k[X]/k} \arrow[u] & d_{k[Y]/k}(g) \otimes f \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & d_{k[X]/k}(\phi^*(g)) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Die obere Zeile des Diagramms entsteht aus der unteren durch Anwenden des Funktors $\otimes_{k[X]} k(X)$ (vgl. 4.2.5 Aufgabe 3). Da die Moduln der unteren Zeile frei vom Rang e bzw. d sind, kann man die vertikalen Abbildungen identifizieren mit den natürlichen Abbildungen

$$k[X]^e \longrightarrow k(X)^e \text{ bzw. } k[X]^d \longrightarrow k(X)^d$$

Weil X irreduzibel ist, d.h. $k[X]$ ist nullteilerfrei und die natürliche Abbildung

$$k[X] \longrightarrow k(X)$$

in den Quotientenkörper ist injektiv, sind auch die vertikalen Abbildungen des Diagramms injektiv. Mit der oberen Zeile ist damit auch die untere Zeile des Diagramms injektiv, d.h. die k[X]-lineare Abbildung

$$\psi: \Omega_Y \otimes_{k[Y]} k[X] \longrightarrow \Omega_X,\ \omega\otimes f \mapsto f\bullet(\phi^*)^0(\omega),$$

ist injektiv. Da die beteiligten k[X]-Moduln frei vom Rang e bzw. d sind, kann man durch Wahl einer Basis die Abbildung durch eine d×e-Matrix A mit Einträgena aus k[X] beschreiben. Weil die Abbildung injektiv ist, hat A den maximalen Rang e,

$$\text{rk } A = e.$$

Es gibt also eine e×e-Teilmatrix von A, deren Determinante eine von 0 verschiedene Funktion aus k[X] ist, d.h. die Determinante ist in einem Punkt $x \in X$ ungleich 0. Für diesen Punkt x gilt

$$\text{rk } A(x) = e.$$

Wie wir im Beweis von (a) gesehen haben, bedeutet dies, das Differential

$$d\phi_x: T_xX \longrightarrow T_{\phi(x)}Y$$

von ϕ im Punkt x ist surjektiv. Damit ist auch Aussage (c) bewiesen.

4. <u>Schritt</u>. Beweis von Aussage (i).

Auf Grund von Aussage (a) des dritten Schnitts gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq X$ des Punktes x derart, daß das Differential

$$d\phi_{x'}: T_{x'}X \longrightarrow T_{\phi(x')}Y$$

surjektiv ist für jeden Punkt

$$x' \in W.$$

Auf Grund der Aussage (b) des dritten Schritts reicht es zu zeigen, daß ϕ dominant ist.

Angenommen, ϕ ist nicht dominant. Dann ist die Abschließung $\overline{\phi(X)}$ des Bildes von ϕ eine echte abgeschlossene Teilvarietät der irreduziben Varietät Y. Nach 1.8.2 hat jede irreduzible Komponente von $\overline{\phi(X)}$ eine Dimension < dim Y,

$$\dim \overline{\phi(X)} < \dim Y = e. \qquad (5)$$

Die Menge

$$Z \subseteq \overline{\phi(X)}$$

der nicht-singulären Punkte von $\overline{\phi(X)}$ ist eine nicht-leere offene Teilmenge von $\overline{\phi(X)}$ (nach 4.3.3 B(ii)). Weil $\phi(X)$ dicht liegt in $\overline{\phi(X)}$ ist $\phi(X) \cap Z$ nicht leer, d.h.

$$\phi^{-1}(Z)$$

ist eine nicht-leere offene Teilmenge von X. Weil X irreduzibel ist, ist der Durchschnitt

$$\phi^{-1}(Z) \cap W$$

mit der offenen Umgebung W von x nicht leer. Für x' aus diesem Durchschnitt ist das Differential

$$d\phi_{x'}: T_{x'}X \twoheadrightarrow T_{\phi(x')}Y$$

surjektiv (nach Definition von W) und

$$\phi(x') \text{ ist ein nicht-singulärer Punkt von } \overline{\phi(X)} \qquad (6)$$

(nach Definition von Z). Weil sich ϕ über $\overline{\phi(X)}$ faktorisiert, faktorisiert sich $d\phi_{x'}$ über $T_{\phi(x')}\overline{\phi(X)}$,

$$d\phi_{x'}: T_{x'}X \longrightarrow T_{\phi(x')}\overline{\phi(X)} \longrightarrow T_{\phi(x')}Y.$$

Dabei wird die Abbildung rechts induziert durch die natürliche Einbettung $\overline{\phi(X)} \hookrightarrow Y$ und ist deshalb injektiv (vgl. 4.1.9 Aufgabe 4). Mit $d\phi_{x'}$ ist auch diese Injektion surjektiv, d.h. es gilt

$$\dim_k T_{\phi(x')}\overline{\phi(X)} = \dim_k T_{\phi(x')}Y \tag{7}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \dim Y \; &> \dim_k \overline{\phi(X)} && \text{(nach (5))} \\ &= \dim_k T_{\phi(x')}\overline{\phi(X)} && \text{(nach (6))} \\ &= \dim_k T_{\phi(x')}Y && \text{(nach (7))} \\ &= \dim Y && \text{(weil } Y \text{ glatt ist).} \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß unser Annahme falsch sein muß, also ϕ dominant sein muß.

5. Schritt. Beweis von Aussage (ii).

Weil ϕ nach Voraussetzung dominant und separabel ist, gibt es nach Aussage (c) des dritten Schritts einen Punkt $x \in X$, welcher den folgenden Bedingungen genügt

1. x ist nicbt-singulärer Punkt von X.
2. $\phi(x)$ ist nicht-singulärer Punkt von Y.
3. $d\phi_x: T_xX \longrightarrow T_{\phi(x)}Y$ ist surjektiv.

Die Menge von (ii) ist somit nicht leer. Wir haben noch zu zeigen, die Menge ist offen. Dazu betrachten wir die folgenden Mengen.

U sei die Menge der nicht-singulären Punkte von X.
V sei die Menge der nicht-singujlären Punkte von Y.
W sei die Menge der Punkte von X, in welchen das Differential von ϕ surjektiv ist.

Wir haben zu zeigen

$U \cap \phi^{-1}(V) \cap W$ ist offen in X.

Nach 4.3.3 B (ii) ist U offen in X und V offen in Y, also $U \cap \phi^{-1}(V)$ offen in X. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, für jeden Punkt x aus

$$U \cap \phi^{-1}(V) \cap W \tag{8}$$

gibt es eine offene Umgebung von x, die ganz in W liegt (denn dann liegt der Durchschnitt dieser Umgebung $U \cap \phi^{-1}(V)$ ganz in (8)). Eine solche Umgebung von x gibt es aber nach Aussage (a) des dritten Schritts tatsächlich.

Bemerkungen.

(a) Die Argumentation im Original weicht von der obigen ab.Es wird dort nur erwähnt, daß aus der Injektivität der Abbildung ψ am Anfang des Beweises des dritten Schritts die von Abbildung (1) folgt, ohne die Annahme der Dominanz von ϕ. Umkehrt wird aus der Injektivität von (1) auf die Dominanz von ϕ geschlossen. Es ist nicht klar, wie der Schluß von der Injektivität von ψ auf die die von (1) ohne die Dominanz von ϕ funktionieren soll. Hat nämlich $\phi^*: k[Y] \longrightarrow k[X]$ den nicht-trivialen Kern I, so ist auch

$$I \bullet \Omega_Y \neq 0$$

(weil Ω_Y frei ist über k[Y]) und liegt im Kern der natürlichen Abbildung

$$\Omega_Y \longrightarrow \Omega_Y \otimes_{k[Y]} k[X],\ \omega \mapsto \omega \otimes 1,$$

also erst recht im Kern von (1)). Es gilt nämlich

$$I\bullet \Omega_Y\otimes_{k[Y]}k[X] = \Omega_Y\otimes_{k[Y]}k[X]\bullet I \quad (\text{wegen } I \subseteq k[Y])$$
$$= \Omega_Y\otimes_{k[Y]} 0$$
$$= 0.$$

(b) Ist ϕ dominant, so ist der Schluß von der Injektivität von ψ auf die der Abbildung (1) nicht schwer. Betrachten wir die natürliche Abbilgung

$$\xi:\Omega_Y \longrightarrow \Omega_Y\otimes_{k[Y]}k[X],\ \omega \mapsto \omega\otimes 1,$$

Sei $\omega_1,...,\omega_e$ eine Basis von Ω_Y über k[Y], also $\omega_1\otimes 1,...,\omega_e\otimes 1$ eine Basis von $\Omega_Y\otimes_{k[Y]}k[X]$ über k[X]. Dann können wir ξ durch Zusammensetzen mit Isomorphismen mit der Abbildung

$$k[Y]^e \xrightarrow{\cong} \Omega_Y \xrightarrow{\xi} \Omega_Y\otimes_{k[Y]}k[X] \xrightarrow{\cong} k[X]^e \qquad (4)$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_e \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{e} f_i\omega_i \mapsto \sum_{i=1}^{e} f_i\omega_i\otimes 1 = \sum_{i=1}^{e} (\omega_i\otimes 1)\bullet\phi^*(f_i) \mapsto \begin{pmatrix} \phi^*(f_1) \\ \dots \\ \phi^*(f_e) \end{pmatrix}$$

identifizieren. Diese Abbildung ist injektiv, weil ϕ dominant, d.h. weil

$$\phi^*: k[Y] \longrightarrow k[X]$$

injektiv sein soll. Weil die erste der drei Abbildungen (4) surjektiv ist, folgt die Injektivität von ξ. Mit ξ und ψ ist auch die Zusammensetzung

$$(\phi^*)^0 = \psi\circ\xi: \Omega_Y \longrightarrow \Omega_X$$

injektiv, d.h. (1) ist injektiv.

QED.

4.3.7 Satz: Eigenschaften homogener Räume **69**

Sei G eine zusammenhängende algebraische Gruppe. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Jeder homogene G-Raum (vgl. 2.3.1) ist irreduzibel und glatt. Insbesondere ist G glatt.

(ii) Sei ϕ: X $\longrightarrow$ Y ein Morphismus von homogenen Räume bezüglich G. Dann ist ϕ surjektiv (also insbesondere dominant) und die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(a) ϕ ist separabel.

(b) Es gibt ein $x\in X$, für welches das Differential

$$d\phi_x: T_xX \longrightarrow T_{\phi(x)}Y$$

von ϕ in x surjektiv ist.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist das Differential von ϕ in jedem Punkt von X surjektiv.

(iii) Sei ϕ: G $\longrightarrow$ G' ein surjektiver Homomorphismus von algebraischen Gruppen. dann ist ϕ genau dann separabel, wenn $d\phi_e$ surjektiv ist.

Beweis. Zu (i). Seien X ein homogener G-Raum und

$$a: G \times X \longrightarrow X,\ (g,x) \mapsto g\bullet x,$$

die Operation von G auf X. Für jeden Punkt $x \in X$ definiert dann die Einschränkung der regulären Abbildung a auf $G\times\{x\}$ eine surjektive reguläre Abbildung

$$\varphi: G \twoheadrightarrow X,\ g \mapsto g\cdot x.$$

Nach Voraussetzung ist G zusammenhängend, also irreduzibel. Als reguläres Bild einer irreduziblen Varietät ist dann aber auch

X irreduzibel

(vgl. 1.2.3 (ii)).
Wir haben noch zu zeigen, jeder Punkt von X ist nicht-singulär. Nach 4.3.3 (ii) B gibt es einen nicht-singulären Punkt von X, sagen wir

$$x_0 \in X \text{ ist nicht-singulär.}$$

Sei jetzt $x \in X$ beliebig vorgegeben. Weil X ein homogener G-Raum ist, gibt es ein $g\in G$ mit

$$x = g\cdot x_0.$$

Die Multiplikation mit g definiert eine reguläre Abbildung

$$\psi: X \longrightarrow X,\ x' \mapsto g\cdot x',$$

genauso wie die Multiplikation mit g^{-1}, welche invers ist zu ψ. Deshalb ist ψ ein Isomorphismus algebraischer Varietäten. Insbesondere ist das Differential von ψ in x_0 ein k-linearer Isomorphismus

$$d\psi_{x_0}: T_{x_0}X \xrightarrow{\cong} T_{\psi(x_0)}X = T_{g\cdot x_0} = T_xX$$

(vgl. Bemerkungen 4.1.3(ii) und (iii)).
Es folgt

$$\begin{aligned}
\dim_x X = \dim X = \dim_{x_0} X &\quad \text{(X ist irreduzibel)}\\
= \dim_k T_{x_0} X &\quad (x_0 \text{ ist nicht singulärer Punkt von X, vgl. 4.1.7})\\
= \dim_k T_x X &\quad (d\psi_{x_0} \text{ ist k-linearer Isomorphismus})
\end{aligned}$$

Also ist auch x ein nicht-singulärer Punkt von X. Da dies für jeden Punkt x von X gilt, ist X glatt.
<u>Zu (ii)</u>. Nach (i) sind X und Y glatte irreduzible Varietäten.
Sei $y \in Y$ ein vorgegebener Punkt. Wir wählen einen Punkt aus dem Bild von ϕ, sagen wir

$$y_0 = \phi(x_0) \text{ mit } x_0 \in X.$$

Weil Y ein homogener Raum ist, gibt es ein $g \in G$ mit

$$y = g\cdot y_0$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\phi(g\cdot x_0) &= g\cdot\phi(x_0) &&(\phi \text{ ist ein G-Morphismus, vgl. 2.3.1})\\
&= g\cdot y_0 &&(\text{nach Wahl von } x_0)\\
&= y &&(\text{nach Wahl von g}).
\end{aligned}$$

Der vorgegebene Punkt y liegt im Bild von ϕ, d.h. ϕ ist surjektiv.

<u>(a) ⇒ (b)</u>. Weil X und Y glatt sind, folgt dies aus 4.3.6 (ii).

<u>(b) ⇒ (a)</u>. Weil X und Y glatt sind, ist dies die Aussage von 4.3.6 (i).

Wir haben noch zu zeigen, aus der Surjektivität des Differentials von ϕ in einem Punkt folgt dessen Surjektivität in allen Punkten. Sei also

$$x_0 \in X$$

ein Punkt, in welchem das Differential surjektiv ist,

$$d\phi_{x_0} : T_{x_0} X \twoheadrightarrow T_{\phi(x_0)} X \text{ ist surjektiv.}$$

Für jedes $x \in X$ gibt es dann ein $g \in G$ mit

$$x = g \cdot x_{x_0}$$

Wir betrachten die Isomorphismen

$$\alpha: X \xrightarrow{\cong} X,\ x' \mapsto g \cdot x', \text{ und } \beta: Y \xrightarrow{\cong} Y,\ y' \mapsto g \cdot y'.$$

Für $x' \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \phi(\alpha(x^*)) &= \phi(g \cdot x') \\ &= g \cdot \phi(x') \qquad (\phi \text{ ist ein G-Morphismus, vgl. 2.3.1}) \\ &= \beta(\phi(x')), \end{aligned}$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \phi\downarrow & & \downarrow\phi \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Wir gehen zu den Differentialen über und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_{x_0} X & \xrightarrow{d\alpha_{x_0}} & T_{\alpha(x_0)} X \\ d\phi_{x_0} \downarrow & & \downarrow d\phi_{\alpha(x_0)} \\ T_{\phi(x_0)} Y & \xrightarrow{d\beta_{\phi(x_0)}} & T_{\beta(\phi(x_0))} Y = T_{\phi(\alpha(x_0))} Y \end{array}$$

(vgl. Bemerkung 4.1.3 (ii)). Nach Wahl von x_0 ist die linke vertikale Abbildung des Diagramms surjektiv. Weil α und β Isomorphismen von algebraischen Varietäten sind, sind deren Differentiale k-lineare Isomorphismen. Deshalb ist auch die rechte vertikale Abbildung des Diagramms surjektiv. Wegen

$$\alpha(x_0) = g \cdot x_0 = x$$

können wir diese Surjektion auch in der Gestalt

$$d\phi_x : T_x X \twoheadrightarrow T_{\phi(x)} Y$$

schreiben. Das Differential von ϕ ist somit in jedem beliebigen Punkt $x \in X$ surjektiv.

Zu (iii). Ein surjektiver Homomorphismus $\phi: G \twoheadrightarrow G'$ von algebraischen Gruppen macht G' zu einem homogenen G-Raum. Betrachtet man G als G-Raum bezüglich der Multiplikation von Links, so wird ϕ zu einem Morphismus homogener Räume. Aussage (iii) ist damit ein Spezialfall von Aussage (ii).
QED.

4.4 Lie-Algebren linearer algebraischer Grupppen 69

4.4.1 Operationen von G auf Ω_G und T_eG 69

4.4.1A Die Operationen λ, ρ:G ⟶ $Aut_k(\Omega_G)$ 69

Sei G eine lineare algebraische Gruppe. Wir bezeichnen mit

$$\lambda: G \longrightarrow Aut_k(k[G]),\ g \mapsto \lambda(g),\ \text{mit } (\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}\bullet x) \text{ für } f\in k[G], g,x\in G$$

und

$$\rho: G \longrightarrow Aut_k(k[G]),\ g \mapsto \rho(g),\ \text{mit } (\rho(g)f)(x) = f(xg) \text{ für } f\in k[G],\ g,x \in G$$

die Darstellungen von G in

$$A := k[G]$$

durch Linkstranslationen bzw. Rechtstranslationen (vgl. 2.3.6 B und 2.3.5). Wie bisher werden wir das Tensorprodukt

$$A\otimes_k A = k[G\times G]$$

mit dem Koordinatenring des Produkts G×G identifizieren, d.h. für f,g∈A werden wir keinen Unterschied zwischen dem Element $f\otimes g \in A\otimes_k A$ und der regulären Abbildung

$$f\otimes g: G\times G \longrightarrow \mathbb{A}^1,\ (x,y) \mapsto f(x)\bullet g(y) = m(f\otimes g)(x,y),$$

machen (vgl. 1.5.2 (iv)). Dabei bezeichne

$$m: A\otimes_k A \longrightarrow A,\ f\otimes g \mapsto f\bullet g,$$

den k-Algebra-Homomorphismus, welcher induziert wird durch Multiplikation

$$A \times A \longrightarrow A,\ (f,g) \mapsto f\bullet g$$

der Algebra A (welche bilinear über k ist).

Bemerkungen

(i) Der Kern des k-Algebra-Homomorphismus m,

$$I := Ker(m: A\otimes_k A \longrightarrow A,\ f\otimes g \mapsto f\bullet g)$$

ist gerade das Ideal der Diagonalen, d.h. der abgeschlossenen Teilvarietiät

$$\Delta = \Delta_G = \{(x,x) \mid x \in G\} \subseteq G\times G$$

des Produkts von G mit sich selbst.

(ii) Für jeden Punkt x ∈ G bilden die k-Algebra-Automorphismen

$$\lambda(x)\otimes\lambda(x): k[G\times G] \longrightarrow k[G\times G],\ f\otimes g \mapsto \lambda(x)f \otimes \lambda(x)g,$$

und

$$\rho(x)\otimes\rho(x): k[G\times G] \longrightarrow k[G\times G],\ f\otimes g \mapsto \rho(x)f \otimes \rho(x)g,$$

das Ideal I (und damit auch I^2) in sich ab.

(iii) Die k-Algebra-Automorphismen von (ii) induzieren - weil sie I und I^2 in sich überführen, k-lineare Isomorphismen von $I/I^2 = \Omega_{A/k} = \Omega_G$, welche wir ebenfalls mit λ(x) bzw. ρ(x) bezeichnen,

$$\lambda(x): \Omega_G \longrightarrow \Omega_G,\ f\bullet d_G g \mapsto (\lambda(x)f)\bullet d_G(\lambda(x)g)$$

bzw.

$$\rho(x): \Omega_G \longrightarrow \Omega_G,\ f\bullet d_G g \mapsto (\rho(x)f)\bullet d_G(\rho(x)g).$$

Diese Abbildungen definieren Gruppen-Homomorphismen

$$\lambda: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(\Omega_G),\ g \mapsto \lambda(g), \text{ und } \rho: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(\Omega_G),\ g \mapsto \gamma(g),$$

d.h. Darstellungen von G in Ω_G.

(iv) Für beliebige f, g $\in$ k[G] und beliebige x $\in$ G gilt

$$\lambda(x)(f\bullet dg) = (\lambda(x)f)\bullet d(\lambda(x)g) \text{ und } \rho(x)(f\bullet dg) = (\rho(x)f)\bullet d(\rho(x)g)$$

Insbesondere kommutiert das natürliche Differential

$$d = d_G: k[G] \longrightarrow \Omega_G$$

mit den Automorphismen $\lambda(x)$ und $\rho(x)$ von Ω_G, d.h. es ist

$$\lambda(x)(dg) = d(\lambda(x)g) \text{ und } \rho(x)(dg) = d(\rho(x)g)$$

für beliebige g $\in$ k[X] und beliebige x $\in$ G.

(v) Die Darstellungen λ und ρ von (iii) sind lokal endlich.

Beweis. Zu (i). Siehe 1.6.5 und Bemerkung 1.6.9L(i).

Zu (ii). Für

$$\sum_{i=1}^{r} f_i \otimes g_i \in I \tag{1}$$

und x,y $\in$ G gilt

$$\begin{aligned}
(\lambda(x)\otimes\lambda(x)(\sum_{i=1}^{r} f_i\otimes g_i))(x,y) &= (\sum_{i=1}^{r} \lambda(x)f_i\otimes \lambda(x)g_i)(y,y)\\
&= (\sum_{i=1}^{r} (\lambda(x))(y)f_i\otimes (\lambda(x)g_i)(y)\\
&= \sum_{i=1}^{r} f_i(x^{-1}\bullet y)\otimes g_i(x^{-1}\bullet y) \qquad \text{(Definition von } \lambda(x))\\
&= (\sum_{i=1}^{r} f_i\otimes g_i)(x^{-1}\bullet y, x^{-1}\bullet y)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt wegen (1) und $(x^{-1}\bullet y, x^{-1}\bullet y) \in \Delta$. Analog ist

$$\begin{aligned}
(\rho(x)\otimes\rho(x)(\sum_{i=1}^{r} f_i\otimes g_i))(x,y) &= (\sum_{i=1}^{r} \rho(x)f_i\otimes \rho(x)g_i)(y,y)\\
&= (\sum_{i=1}^{r} (\rho(x))(y)f_i\otimes (\rho(x)g_i)(y)\\
&= \sum_{i=1}^{r} f_i(y\bullet x)\otimes g_i(y\bullet x) \text{ (Definition von } \lambda(x))\\
&= (\sum_{i=1}^{r} f_i\otimes g_i)(y\bullet x, y\bullet x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

(wegen (1) und $(y\bullet x,y\bullet x) \in \Delta$).

Zu (iii) und (iv). Als k[G]-Modul wird

$$\Omega_G = \Omega_{k[G]/k}$$

(vgl. 4.3.3) von den Elementen der Gestalt

$$d_G g = g\otimes 1 - 1\otimes g \bmod I^2 \text{ mit } g \in k[G]$$

erzeugt (vgl. Bemerkung 4.2.1 (iii)), als k-Vektorraum somit von den Elementen der Gestalt

$$\begin{aligned} f\bullet d_G g &= f\bullet(g\otimes 1 - 1\otimes g) \bmod I^2 \text{ mit } f,g \in k[G] \\ &= (f\bullet g)\otimes 1 - f\otimes g \bmod I^2 \end{aligned}$$

Für die durch $\lambda(x)\otimes\lambda(x)$ induzierte Abbildung erhalten wir also

$$\begin{aligned} \lambda(x)\bullet(f\bullet d_G g) &= (\lambda(x)\otimes\lambda(x))(f\bullet d_G g) \\ &=(\lambda(x)\otimes\lambda(x))((f\bullet g)\otimes 1 - f\otimes g) \bmod I^2 \\ &= (\lambda(x)(f\bullet g))\otimes\lambda(x)(1) - (\lambda(x)f)\otimes(\lambda(x)g) \bmod I^2. \end{aligned}$$

Weil $\lambda(x)$ ein Homomorphismus von k-Algebren ist, folgt

$$\begin{aligned} \lambda(x)\bullet(f\bullet d_G g) &= (\lambda(x)f\bullet\lambda(x)g))\otimes 1 - (\lambda(x)f)\otimes(\lambda(x)g) \bmod I^2 \\ &= (\lambda(x)f)\bullet(\lambda(x)g)\otimes 1 - 1\otimes(\lambda(x)g) \bmod I^2 \\ &= (\lambda(x)f)\bullet d_G(\lambda(x)g). \end{aligned}$$

Die Rechnung für ρ anstelle von λ ist analog. Damit ist Bemerkung (iv) bewiesen und die Abbildungsvorschriften für

$$\lambda(x)\colon \Omega_G \longrightarrow \Omega_G \text{ und } \rho(x)\colon \Omega_G \longrightarrow \Omega_G$$

sind die in (iii) angegebenen. Es bleibt noch zu zeigen, daß auf diese Weise Gruppen-Homomorphismen

$$\lambda\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(\Omega_G),\ g \mapsto \lambda(g), \text{ und } \rho\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(\Omega_G),\ g \mapsto \rho(g),$$

definierte sind. Das ist aber der Fall, weil die Linkstranslation und Rechtstranslation Gruppen-Homomorphismen

$$\lambda\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(k[G]),\ g \mapsto \lambda(g), \text{ und } \rho\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(k[G]),\ g \mapsto \rho(g),$$

definieren (vgl. Bemerkungen 2.3.5 (i) und (ii) und 2.3.2 Beispiel 2).

Genauer, für $x,y \in G$ und $f, g \in k[G]$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda(x\bullet y)(f\bullet dg) &= (\lambda(x\bullet y)f)\bullet d\,(\lambda(x\bullet y)g) \\ &= (\lambda(x)\bullet\lambda(y)\bullet f)\bullet d(\lambda(x)\bullet\lambda(y)\bullet g) \\ &= \lambda(x)(\lambda(y)\bullet f)\bullet d(\lambda(y)\bullet g) \\ &= \lambda(x)(\lambda(y)(f\bullet dg) \end{aligned}$$

Da dies für beliebige f und g gilt und die auftretenden Abbildungen k-linear sind, folgt

$$\lambda(x\bullet y) = \lambda(x)\circ\lambda(y) \text{ für } x,y \in G.$$

Trivialerweise operiert $\lambda(e)$ wie die identische Abbildung auf Ω_G. Wir haben gezeigt,

$$\lambda\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(k[G])$$

ist ein Gruppen-Homomorphismus. Die Argumentation für ρ ist analog.

Zu (v). Weil die Elemente der Gestalt

$$f\bullet d_G g \text{ mit } f, g \in k[X] \qquad (2)$$

als k-Vektorraum erzeugen (vgl. den Anfang des Beweises von (iii)), reicht es zu zeigen, daß jedes dieser Elemente in einem G-stabilen k-linearen Unterraum $V \subseteq \Omega_G$

endlicher Dimension liegt (bezüglich der Operationen λ und ρ). Weil die Darstellungen

$$\lambda: G \longrightarrow Aut_k(k[G]) \text{ und } \rho: G \longrightarrow Aut_k(k[G])$$

lokal endlich sind (nach 2.3.6 A und B), gibt es endlich-dimensionale k-lineare Unterraume

$$V, W \subseteq k[G]$$

mit

$$f \in V \text{ und } g \in W.$$

Die Abbildung

$$V\times W \longrightarrow \Omega_G = \Omega_{k[G]/k}, (a,b) \mapsto a\bullet d_G b,$$

ist bilinear über k (weil d_G eine k-lineare Abbildung ist) und das Differential (2) liegt im Bild der Abbildung, und damit auch im Bild der induzierten k-linearen Abbildung

$$\varphi: V\otimes_k W \longrightarrow \Omega_G = \Omega_{k[G]/k}, a\otimes b \mapsto a\bullet d_G b,$$

Nach (iv) sind die folgenden Diagramme für jedes $x \in G$ kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} V\otimes_k W & \xrightarrow{\varphi} & \Omega_G \\ \lambda(x)\otimes\lambda(x)\downarrow & & \downarrow\lambda(x) \\ V\otimes_k W & \xrightarrow{\varphi} & \Omega_G \\ a\otimes b & \mapsto & a\bullet db \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\lambda(x)a)\otimes(\lambda(x)b) & \mapsto & (\lambda(x)a)\bullet d(\lambda(x)b) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V\otimes_k W & \xrightarrow{\varphi} & \Omega_G \\ \rho(x)\otimes\rho(x)\downarrow & & \downarrow\rho(x) \\ V\otimes_k W & \xrightarrow{\varphi} & \Omega_G \\ a\otimes b & \mapsto & a\bullet db \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\rho(x)a)\otimes(\rho(x)b) & \mapsto & (\rho(x)a)\bullet d(\rho(x)b) \end{array}$$

Das bedeutet aber, das Bild von $V\otimes_k W$ bei φ ist stabil bezüglich der beiden Operationen von G auf Ω_G.

QED.

4.4.1B Die Operation Ad: G $\longrightarrow$ Aut$_k$(T$_e$G) 69

Sei G eine lineare algebraische Gruppe. Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung

$$Int(g): G \longrightarrow G, x \mapsto gxg^{-1},$$

ein Automorphismus von linearen algebraischen Gruppen, welcher das neutrale Element e in sich abbildet. Das Differential von Int(g) im neutralen Element wird mit

$$Ad(g) := d(Int(g))_e: T_eG \longrightarrow T_eG \qquad (1)$$
$$D \mapsto D\circ Int(g)^*$$

bezeichnet.

Bemerkungen

(i) Die Abbildung (1) ist für jedes $g \in G$ ein k-linearer Isomorphismus und

$$Ad: G \longrightarrow Aut_k(T_eG), g \mapsto Ad(g),$$

ein Gruppen-Homomorphismus.

(ii) Der Gruppen-Homomorphismus Ad induziert einen Gruppen-Homomorphismus

$$Ad^*: G \longrightarrow Aut_k((T_eG)^*), g \mapsto (\ell \mapsto \ell\circ Ad(g^{-1})).$$

(iii) Sei $M_x \subseteq k[G]$ das Ideal der regulären Funktionen auf G, welche in $x \in G$ gleich Null sind. Dann können wir den Tangentialraum T_eG identifizieren mit dem Dual des Vektorraums M_e/M_e^2,

$$\mathrm{Hom}_k(M_e/M_e^2, k) \longrightarrow T_eG = \mathrm{Der}_k(k[G], k_e),\ \ell \mapsto (f \mapsto \ell(\delta(f))),$$

mit

$$\delta(f) := (f\text{-}f(e) \bmod M_e^2) \in M_e/M_e^2,$$

also auch den Kotangentialraum $(T_eG)^*$ mit M_e/M_e^2. Wir erhalten so eine k-lineare Abbildung

$$\delta\colon k[G] \longrightarrow M_e/M_e^2 = (T_eG)^*$$

mit

$$\delta(f)(X) = X(f)$$

für jede reguläre Funktion $f \in k[G]$ und jeden Tangentialvektor $X \in T_eG$.

Beweis. Zu (i). Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(g\bullet h) &= d\mathrm{Int}(g\bullet h)_e = d(\mathrm{Int}(g)\circ\mathrm{Int}(h))_e = d\mathrm{Int}(g)_e \circ d\mathrm{Int}(h)_e \\ &= \mathrm{Ad}(g)\circ\mathrm{Ad}(h) \end{aligned}$$

und trivialerweise erhalten wir für das neutrale Element

$$\mathrm{Ad}(e) = \mathrm{Id}$$

die identische Abbildung von T_eG.

Zu (ii). Nach Definition ist

$$\mathrm{Ad}^*(g)\ell = \ell\circ\mathrm{Ad}(g^{-1}).$$

für beliebige $g \in G$ und $\ell \in (T_eG)^*$. Für $g, h \in G$ und $\ell \in (T_eG)^*$ folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}^*(gh)\ell &= \ell\circ\mathrm{Ad}((gh)^{-1}) && \text{(Definition von Ad*)} \\ &= \ell\circ\mathrm{Ad}(h^{-1}g^{-1}) \\ &= \ell\circ\mathrm{Ad}(h^{-1})\circ\mathrm{Ad}(g^{-1}) && \text{(Ad ist Gruppen-Homorphismus)} \\ &= (\mathrm{Ad}^*(h)\ell)\circ\mathrm{Ad}(g^{-1}) && \text{(Definition von Ad*)} \\ &= \mathrm{Ad}^*(g)\bullet(\mathrm{Ad}^*(h)\ell) && \text{(Definition von Ad*)} \\ &= (\mathrm{Ad}^*(g)\circ\mathrm{Ad}^*(h))\ell \end{aligned}$$

also

$$\mathrm{Ad}^*(gh) = \mathrm{Ad}^*(g)\circ\mathrm{Ad}^*(h),$$

d.h. Ad* ist tatsächlich ein Gruppen-Homomorphismus.
Zu (iii). Dies ist ein Spezialfall von 4.1.4.
QED.

4.4.2 Die Trivialisierung des Kotangentialbündels 70

Sei G eine lineare algebraische Gruppe. Dann gibt es einen Isomorphismus von k[G]-Moduln

$$\Phi\colon \Omega_G \xrightarrow{\cong} k[G]\otimes_k (T_eG)^*,$$

wobei die Modulstruktur rechts vom ersten Faktor kommt, mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Für jedes $x \in G$ gilt

$$\Phi\circ\lambda(x)\circ\Phi^{-1} = \lambda(x)\otimes Id \text{ und } \Phi\circ\rho(x)\circ\Phi^{-1} = \rho(x)\otimes(Ad\ x)^*.$$

(siehe 4.4.1A zur Definition von λ, ρ und Ad*).

(ii) Für $f \in k[G]$ und $\Delta f = \sum_i f_i\otimes g_i \in$ gilt

$$\Phi(df) = - \sum_i f_i\otimes \delta g_i.$$

Dabei seien

$$\Delta\colon k[G] \longrightarrow k[G]\otimes_k k[G]$$

die Komultiplikation von G und

$$\delta\colon k[G] \longrightarrow (T_eG)^* = M_e/M_e^2,\ f \mapsto (X \mapsto X(f) = f - f(e) \bmod M_e^2)$$

die in Bemerkung 4.4.1B (iii) definierte Abbildung.

Bemerkungen

(i) Der Isomorphismus Φ ist ein funktorieller Isomorphismus: für jeden Homomorphismus

$$h\colon G \longrightarrow G'$$

von linearen algebraischen Gruppen ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} \Omega_G & \overset{\Phi}{\underset{\cong}{\longrightarrow}} & k[G]\otimes_k(T_eG)^* \\ h^0\uparrow & & \uparrow h^*\otimes(dh_e)^* \\ \Omega_{G'} & \overset{\Phi'}{\underset{\cong}{\longrightarrow}} & k[G']\otimes_k(T_eG')^* \end{array}$$

Dabei seien Φ' der zu G' gehörige Isomorphismus, h^0 der durch $h^*\colon k[G']\longrightarrow k[G]$ induzierte Homomorphismus der Differentialmoduln (vgl. 4.2.4),

$$dh_e\colon T_eG \longrightarrow T_{e'}G'$$

das Differential von h im neutralen Element e (vgl. 4.1.3) und

$$(dh_e)^*\colon (T_{e'}G')^* \longrightarrow (T_eG)^*,\ \ell \mapsto \ell\circ dh_e,$$

die durch dh_e auf den Kotangentialräumen induzierte (duale) Abbildung.

(ii) Ist G eine F-Gruppe, so ist der Isomorphismus über F definiert bezüglich der F-Strukturen

$$\Omega_G(F) := \Omega_{F[G]/F} \text{ und } (T_eG)^*(F) := M_e(F) / M_e(F)^2$$

mit

$$M_e(F) := F[G] \cap M_e$$

$$M_e \quad := Ker(k[G]\longrightarrow k,\ f \mapsto f(e)).$$

Dies sind tatsächlich F-Strukturen von Ω_G und $(T_eG)^*$ (vgl. auch die Definition von $(T_eG)^*(F)$ in 4.1.8 und Bemerkung 4.1.8 (ii))

Beweis des Satzes

Die Abbildung

$$\psi\colon G\times G \longrightarrow G\times G,\ (x,y) \mapsto (x, xy),$$

ist ein Isomorphismus algebraischer Varietäten. Für beliebige $g \in G$ sind die folgenden beiden Diagramme kommutativ.

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "L_g\times \mathrm{Id}"'] & G\times G \arrow[d, "L_g\times L_g"] \\ G\times G \arrow[r, "\psi"] & G\times G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "R_g\times \mathrm{Int}(g^{-1})"'] & G\times G \arrow[d, "R_g\times R_g"] \\ G\times G \arrow[r, "\psi"] & G\times G \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Dabei seien wie bisher L_g und R_g die zur g gehörigen Translationen von links bzw. von rechts,

$$L_g\colon G \longrightarrow G,\ x \mapsto gx, \text{ und } R_g\colon G \longrightarrow G,\ x \mapsto xg.$$

Explizit ist

$$\begin{aligned} (L_g\times L_g)\circ\psi\,(x,y) &= (L_g\times L_g)(x,xy)\\ &= (gx, gxy)\\ &= \psi(gx, y)\\ &= \psi\circ(L_g\times \mathrm{Id}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (R_g\times R_g)\circ\psi\,(x,y) &= (R_g\times R_g)(x,xy)\\ &= (xg, xyg)\\ &= (xg, xg\bullet g^{-1}yg)\\ &= \psi(xg, g^{-1}yg)\\ &= \psi\circ(R_g\times \mathrm{Ing}(g^{-1})\ (x,y). \end{aligned}$$

Der induzierte Isomorphismus der Koordinatenringe,

$$\psi^*\colon k[G]\otimes_k k[G] \longrightarrow k[G]\otimes_k k[G], \qquad (2)$$

ist gegeben durch

$$\psi^*(f)(x,y) = f(x,xy)$$

für $x,y \in G$. Sei

$$I := \mathrm{Ker}(m\colon k[G]\otimes_k k[G] \longrightarrow k[G],\ f\otimes g \mapsto f\bullet g)$$

das Ideal der Diagonalen

$$\Delta := \{(x,x) \mid x \in G\}$$

von $G\times G$ (vgl. Bemerkung 4.4.1A(i)). Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi^*I &= \{\, \psi^*f\in k[G\times G] \mid f \in I\}\\ &= \{\, f\circ\psi \mid f \in I\}\\ &= \{\, f\circ\psi \mid f\in k[G\times G] \text{ und } f(x,x) = 0 \text{ für } x \in G\}\\ &= \{\, f\circ\psi \mid f\in k[G\times G] \text{ und } f\circ\psi(x,e) = 0 \text{ für } x \in G\,\} && \text{(nach Definition von } \psi)\\ &= \{\, f \mid (\psi^{-1})^*f\in k[G\times G] \text{ und } f(x,e) = 0 \text{ für } x \in G\,\}\\ &= \{\, f \mid f\in k[G\times G] \text{ und } f(x,e) = 0 \text{ für } x \in G\,\} && (\psi \text{ ist ein Isomorphismus}) \end{aligned}$$

d.h. ψ^*I ist das Ideal von $G\times\{e\}$ in $k[G]\otimes_k k[G]$, d.h.

$$\psi^*I = k[G]\otimes_k M_e.$$

Damit induziert der Isomorphismus (2) einen Isomorphismus von k[G]-Moduln

$$\tilde{\Phi}\colon \Omega_G = I/I^2 \xrightarrow{\cong} k[G]\otimes_k M_e/k[G]\otimes_k M_e^2 \xrightarrow{\cong} k[G]\otimes_k (M_e/M_e^2)$$

$$d_G f = f\otimes 1 - 1\otimes f \bmod I^2 \mapsto \psi^*(f\otimes 1 - 1\otimes f) \bmod k[G]\otimes_k M_e^2$$

Dabei kommt der rechte Isomorphismus von der Exaktheit des Funktors $k[G]\otimes_k$.
Aus den kommutativen Diagrammen erhaten wir die Kommutativität der analogen Diagramme für ψ^*.

$$\begin{tikzcd}
k[G]\otimes_k k[G] & k[G]\otimes_k k[G] \arrow[l, "\psi^*"'] \\
k[G]\otimes_k k[G] \arrow[u, "\lambda(g)\otimes \mathrm{Id}"] & k[G]\otimes_k k[G] \arrow[l, "\psi^*"'] \arrow[u, "\lambda(g)\otimes\lambda(g)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k[G]\otimes_k k[G] & k[G]\otimes_k k[G] \arrow[l, "\psi^*"'] \\
k[G]\otimes_k k[G] \arrow[u, "\rho(g)\otimes \mathrm{Int}(g^{-1})^*"] & k[G]\otimes_k k[G] \arrow[l, "\psi^*"'] \arrow[u, "\rho(g)\otimes\rho(g)"']
\end{tikzcd}$$

und durch Einschränkten auf I bzw. I^2 und Faktorisieren, die der Diagramme

$$\begin{tikzcd}
k[G]\otimes_k M_e/M_e^2 & \Omega_G \arrow[l, "\tilde{\Phi}"'] \\
k[G]\otimes_k M_e/M_e^2 \arrow[u, "\lambda(g)\otimes \mathrm{Id}"] & \Omega_G \arrow[l, "\tilde{\Phi}"'] \arrow[u, "\lambda(g)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k[G]\otimes_k M_e/M_e^2 & \Omega_G \arrow[l, "\tilde{\Phi}"'] \\
k[G]\otimes_k M_e/M_e^2 \arrow[u, "\rho(g)\otimes \mathrm{Int}(g^{-1})^*"] & \Omega_G \arrow[l, "\tilde{\Phi}"'] \arrow[u, "\rho(g)"']
\end{tikzcd}
\quad (3)$$

Nach 4.1.4 können wir M_e/M_e^2 mit dem Kotangentialraum identifizieren,

$$M_e/M_e^2 \xrightarrow{\cong} (T_eG)^*,\ f \bmod M_e^2 \mapsto (X \mapsto X(f)).$$

Die durch

$$\mathrm{Int}(g^{-1})^*\colon M_e/M_e^2 \longrightarrow M_e/M_e^2,\ f \bmod M_e^2 \mapsto f\circ \mathrm{Int}(g^{-1}) \bmod M_e^2$$

induzierte Abbildung des Kotangentialsraums

$$\varphi\colon (T_eG)^* \longrightarrow (T_eG)^*$$

bildet den durch $f \bmod M_e^2$ gegebenen Kotangentialvektor

$$\ell\colon T_eG \longrightarrow k,\ X \mapsto \ell(X) := X(f),$$

ab in den durch $\mathrm{Int}(g^{-1})^*(f) \bmod M_e^2$ gegebenen Kotangentialvektor

$$\varphi(\ell)\colon T_eG \longrightarrow k,\ X \mapsto X(\mathrm{Int}(g^{-1})^*(f)).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\varphi(\ell)(X) &= \ell(X\circ \mathrm{Int}(g^{-1})^*) \\
&= \ell(\mathrm{Ad}(g^{-1})(X)) \qquad \text{(vgl. 4.4.1B, Abbildung (1))} \\
&= (\ell\circ \mathrm{Ad}(g^{-1}))(X),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\varphi(\ell) &= \ell\circ \mathrm{Ad}(g^{-1}) \\
&= \mathrm{Ad}^*(g)(\ell),
\end{aligned}$$

also

$\varphi \qquad = Ad^*(g).$

Damit bekommen die Diagramme (3) die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} k[G]\otimes_k(T_eG)^* & \xleftarrow{\Phi} & \Omega_G \\ \lambda(g)\otimes Id \uparrow & & \uparrow \lambda(g) \\ k[G]\otimes_k(T_eG)^* & \xleftarrow{\Phi} & \Omega_G \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} k[G]\otimes_k(T_eG)^* & \xleftarrow{\Phi} & \Omega_G \\ \rho(g)\otimes Ad(g)^* \uparrow & & \uparrow \rho(g) \\ k[G]\otimes_k(T_eG)^* & \xleftarrow{\Phi} & \Omega_G \end{array}$$

Weil Φ ein Isomorphismus ist, können wir die Kommutativität dieser Diagramme auch in Gestalt der folgenden Relationen aufschreiben.

$$\Phi\circ\lambda(g)\circ\Phi^{-1} = \lambda(g)\otimes Id$$

und

$$\Phi\circ\rho(g)\circ\Phi^{-1} = \rho(g)\otimes Ad(g)^*$$

Damit ist Aussage (i) bewiesen.

Nach Konstruktion ist $\tilde{\Phi}$ die k[G]-linearer Abbildung

$$\tilde{\Phi}: \Omega_G = I/I^2 \xrightarrow{\cong} k[G]\otimes_k(M_e/M_e^2)$$

mit

$$\tilde{\Phi}(d_G f) = \psi^*(f\otimes 1-1\otimes f) \bmod k[G]\otimes_k M_e^2$$

für $f \in k[G]$. Die Bedingung $\Delta f = \sum_i f_i\otimes g_i$ bedeutet,

$$f(xy) = \sum_i f_i(x)\bullet g_i(y) \text{ für } x,y \in G.$$

Für $x,y \in G$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi^*(f\otimes 1-1\otimes f)(x,y) &= (f\otimes 1 - 1\otimes f)(x,xy) \qquad \text{(nach (2))} \\ &= f(x)\bullet 1 - 1\bullet f(xy) \\ &= f(x\bullet e) - f(xy) \\ &= \sum_i f_i(x)\bullet g_i(e) - \sum_i f_i(x)\bullet g_i(y) \\ &= \sum_i f_i(x)\bullet(g_i(e) - g_i(y)) \\ &= - (\sum_i f_i\otimes(g_i - g_i(e)))(x,y). \end{aligned}$$

Da dies für alle $x,y \in G$ gilt, folgt

$$\psi^*(f\otimes 1-1\otimes f) = - \sum_i f_i\otimes(g_i - g_i(e))$$

also

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(d_G f) &= \psi^*(f\otimes 1-1\otimes f) \bmod k[G]\otimes_k M_e^2 \\ &= - \sum_i f_i\otimes(g_i - g_i(e)) \bmod k[G]\otimes_k M_e^2 \end{aligned}$$

$$= - \sum_i f_i \otimes \delta(g_i) \qquad\qquad \text{(nach 4.1.4)}$$

Indem wir M_e/M_e^2 wie in 4.1.4 mit $(T_eG)^*$ identifizieren, erhalten wir die Behauptung.
QED.

Beweis der Bemerkungen

<u>Zu (i)</u>. Wir betrachten das folgende Diagramm von regulären Abbildungen affiner Varietäten.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, equal] \arrow[dr, "i_1"] \arrow[ddd, "h"'] & G \arrow[dr, "\Delta_G"] & \\
& G\times G \arrow[r, "\psi", "\cong"'] \arrow[d, "h\times h"'] & G\times G \arrow[d, "h\times h"] \\
& G'\times G' \arrow[r, "\psi'", "\cong"'] & G'\times G' \\
G' \arrow[r, equal] \arrow[ur, "i'_1"] & G' \arrow[ur, "\Delta_{G'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dabei seien ψ, ψ', Δ_G, $\Delta_{G'}$, i_1 und i'_1 die folgenden Abbildungen.

ψ: $G \times G \longrightarrow G \times G$, $(x,y) \mapsto (x,xy)$, derselbe Isomorphismus wie im obigen Beweis,

ψ':$G'\times G' \longrightarrow G'\times G'$, $(x,y) \mapsto (x,xy)$, die analoge Abbildung für G'.

Δ_G: $G \longrightarrow G \times G$, $\quad x \mapsto (x,x)$, $\qquad$ die Diagonaleinbettung von G in $G\times G$,

$\Delta_{G'}$: $G' \longrightarrow G'\times G'$, $\quad x \mapsto (x,x)$, $\qquad$ die Diagonaleinbettung von G' in $G'\times G'$,

i_1: $G \mapsto G \times G, x \mapsto (x,e)$, die Identifikation von G mit dem ersten Faktor von $G\times G$.

i'_1:$G' \mapsto G'\times G', x \mapsto (x,e)$, die Identifikation von G' mit dem ersten Faktor von $G'\times G'$.

An den Abbildungsvorschriften liest man ab, daß dieses Diagramm kommutativ ist. So gilt für das Front-Viereck:

$$\begin{aligned}
(h\times h)\circ\psi\,(x,y) &= (h\times h)(x,xy) = (h(x), h(xy)) = (h(x), h(x)h(y)) = \psi'(h(x),h(y)) \\
&= \psi'\circ(h\times h)\,(x,y),
\end{aligned}$$

die Bodenfläche:

$$\begin{aligned}
\psi'\circ i'_1(x) &= \psi'(x,e) = (x,x) \\
&= \Delta_{G'}(x)
\end{aligned}$$

die Dachfläche:

$$\begin{aligned}
\psi\circ i_1\,(x) &= \psi(x,e) = (x,x) \\
&= \Delta_G\,(x)
\end{aligned}$$

die linke Seitenfläche:

$$\begin{aligned}
(h\times h)\circ i_1(x) &= (h\times h)(x,e) = (h(x), e) \\
&= i'_1\circ h\,(x)
\end{aligned}$$

die rechte Seitenfläche:

$$
\begin{aligned}
(h\times h)\circ\Delta_G(x) &= (h\times h)(x,x) = (h(x),\, h(x))\\
&= \Delta_{G'}\circ h\,(x)
\end{aligned}
$$

Wir gehen zu den zugehörigen k-Algebra-Homomorphismen der Koordinatenringe über und erhalten das kommutative Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
k[G] \arrow[r, phantom, "="] & k[G] & \\
& k[G]\otimes_k k[G] \arrow[ul, "i_1^*"'] & k[G]\otimes_k k[G] \arrow[l, "\psi^*"', "\cong"] \arrow[ul, "\Delta_G^*"'] \\
& k[G']\otimes_k k[G'] \arrow[u, "h^*\otimes h^*"] \arrow[dl, "i'^*_1"'] & k[G']\otimes_k k[G'] \arrow[l, "\psi'^*"', "\cong"] \arrow[u, "h^*\otimes h^*"'] \arrow[dl, "\Delta_{G'}^*"] \\
k[G'] \arrow[uuu, "h^*"] \arrow[r, phantom, "="] & k[G'] &
\end{tikzcd}
$$

Insbesondere gilt

$$
h^*\circ\Delta_{G'}^* = \Delta_G^*\circ(h^*\otimes h^*),
$$

also

$$
(h^*\otimes h^*)(\mathrm{Ker}\ \Delta_{G'}^*) \subseteq \mathrm{Ker}(\Delta_G^*).
$$

Im obigen Beweis haben wir gesehen,

$$
\psi^*(\mathrm{Ker}\ \Delta_G^*) = k[G]\otimes_k M_e.
$$

Man beachte Ker Δ_G^* ist gerade das Ideal I, welches den Differentialmodul Ω_G definiert. Analog gilt

$$
\psi^*(\mathrm{Ker}\ \Delta_{G'}^*) = k[G']\otimes_k M'_{e'},
$$

wenn $M'_{e'}$ das Ideal von k[G'] bezeichnet der Funktionen mit den Nullstelle e'. Als Homomorphismus bildet h die neutralen Elemente ineinander ab, so daß

$$
h^*(M'_{e'}) \subseteq M_e
$$

gilt. Zusammen erhalten wir das kommutative Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
k[G]\otimes_k M_e & \mathrm{Ker}(\Delta_G^*) \arrow[l, "\psi^*"', "\cong"] \\
k[G']\otimes_k M'_{e'} \arrow[u, "h^*\otimes h^*"] & \mathrm{Ker}(\Delta_{G'}^*) \arrow[l, "\psi'^*"', "\cong"] \arrow[u, "h^*\otimes h^*"']
\end{tikzcd}
$$

und damit auch das kommutative Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
k[G]\otimes_k(M_e/M_e^2) & \Omega_G \arrow[l, "\tilde\Phi"', "\cong"] \\
k[G']\otimes_k(M'_{e'}/M'^2_{e'}) \arrow[u, "h^*\otimes\alpha"] & \Omega_{G'} \arrow[l, "\tilde\Phi'"', "\cong"] \arrow[u, "h^0"']
\end{tikzcd}
$$

mit $\widetilde{\Phi}$ wie im obigen Beweis und $\widetilde{\Phi}'$ das Analogon zu $\widetilde{\Phi}$ für G'. Weiter ist h^0 die durch $h^*\otimes h^*$ $k[G']\otimes k[G'] \longrightarrow k[G]\otimes k[G]$ induzierte Abbildung von 4.2.3. Die Abbildung α ist durch h^*: $k[G'] \longrightarrow k[G]$ induziert, d.h. für $f' \in M'_{e'}$ gilt

$$\alpha(f' \bmod M'^2_{e'}) = f'\circ h \bmod M^2_e.$$

Wenn wir M_e / M_e^2 und $M'_{e'} / M'^2_{e'}$ wie in 4.1.4 mit dem Dual von T_eG bzw. $T_{e'}G'$ identifizieren, so gilt für jedes $X \in T_eG$ und jedes $f' \in M'_{e'}$:

$$\begin{aligned}
&\alpha(f' \bmod M'^2_{e'})\,(X) = (f'\circ h \bmod M^2_e)(X)\\
&=^{13} X(f'\circ h)\\
&= (X\circ h^*)(f')\\
&= ((dh_e)X)(f') \text{ (nach Definition des Differentials } dh_e \text{ in 4.1.3)}\\
&=^{14} (f' \bmod M'^2_{e'})((dh_e)X).
\end{aligned}$$

Weil dies für jedes $X \in T_eG$ gilt folgt

$$\begin{aligned}
\alpha(f' \bmod M'^2_{e'}) &= (f' \bmod M'^2_{e'})\circ(dh_e)\\
&= (dh_e)^*(f' \bmod M'^2_{e'}).
\end{aligned}$$

Weil dies für jedes $f' \in M'_{e'}$ folgt

$$\alpha = (dh_e)^*.$$

Das kommutative Diagramm bekommt so die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
k[G]\otimes_k(T_eG)^* & \Omega_G \arrow[l, "\Phi"', "\cong"] \\
k[G']\otimes_k(T_{e'}G')^* \arrow[u, "h^*\otimes(dh_e)^*"] & \Omega_{G'} \arrow[l, "\Phi'"', "\cong"] \arrow[u, "h^0"']
\end{tikzcd}$$

mit Φ wie im obigen Beweis und Φ' das Analogon von Φ für G'. Der Isomorphismus Φ ist also tatsächlich funktoriell.

Zu (ii). 1. Schritt. $\Omega_G(F) = \Omega_{F[G]/F}$ ist eine F-Struktur von $\Omega_G = \Omega_{k[G]/k}$.
Nach der Bemerkung von 4.2.3 gilt

$$k\otimes_F \Omega_{F[G]/F} \cong \Omega_{k\otimes_F F[G]/k} \cong \Omega_{k[G]/k} = \Omega_G.$$

2. Schritt. $(T_eG)^*(F) = M_e(F) / M_e(F)^2$ ist eine F-Struktur von $(T_eG)^* = M_e / M_e^2$.
Die Aussage ergibt sich aus der Aussage des ersten Schritts im Beweis von Bemerkung 4.1.8 (ii) und der Tatsache, daß $e \in G$ ein rationaler Punkt der F-Gruppe G ist (vgl. 2.1.1.1).

In den nachfolgenden Schritten betrachten wir das folgende kommutative Diagramm

---

[13] Auf Grund des Isomorphismus am Ende von 4.1.4 oder nach Bemerkung 4.4.1 B(iii)
[14] Auf Grund des Isomorphismus am Ende von 4.1.4 oder nach Bemerkung 4.4.1 B(iii)

$$\begin{array}{ccc} G & = & G \\ {\scriptstyle i_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Delta_G} \\ G\times G & \xrightarrow{\psi} & G\times G \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \mapsto & x \\ & & \downarrow \\ \downarrow & & (x,x) \\ & & \| \\ (x,e) & \mapsto & (x,x\bullet e) \end{array} \tag{4}$$

Dabei seien wie bisher i_1 , Δ_G und ψ die folgenden Abbildungen

i_1: $G \mapsto G \times G, x \mapsto (x,e)$,

Δ_G: $G \longrightarrow G \times G$, $x \mapsto (x,x)$,

ψ: $G \times G \longrightarrow G \times G$, $(x,y) \mapsto (x,xy)$,

und das zugehörige Diagramm der k-Algebra-Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} k[G] & = & k[G] \\ {\scriptstyle i_1^*}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \Delta_G^*} \\ k[G]\otimes_k k[G] & \xleftarrow{\psi^*} & k[G]\otimes_k k[G] \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f(x,e) & \leftarrow & f(x,x) \\ \uparrow & & \\ f(x,y) & & \uparrow \\ & & \\ f(x,xy) & \leftarrow & f(x,y) \end{array} \tag{5}$$

3. <u>Schritt</u>. ψ ist über F definiert, d.h. $\psi^*(F[G]\otimes F[G]) \subseteq F[G]\otimes F[G])$.
Wir betrachten das kommutativen Diagramm
Die Abbildung $\psi = (id,\mu)$ ist definiert durch die Bedingungen

$$p_1\circ\psi = p_1 \text{ und } p_2\circ\psi = \mu \text{ (die Multiplikation von G),}$$

Damit ist ψ^* definiert durch die Bedingungen

$$\psi^*\circ p_1^* = p_1^* \text{ und } \psi^*\circ p_2^* = \mu^*,$$

d.h. durch

$$\psi^*(f\otimes 1) = f\otimes 1 \text{ und } \psi^*(1\otimes f) = \mu^*(f) \text{ für } f, g \in k[G].$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \psi^*(f\otimes g) &= \psi^*((f\otimes 1)\bullet(1\otimes g)) \\ &= \psi^*(f\otimes 1)\bullet\psi^*(1\otimes g) \quad (\psi^* \text{ ist k-Algebra-Homomorphismus}) \\ &= (f\otimes 1)\bullet \mu^*(g). \end{aligned}$$

Weil G eine F-Gruppe ist, ist die Komultiplikation μ^* über F definiert, d.h. es ist

$$\begin{aligned} \psi^*(F[G]\otimes F[G]) &= (F[G]\otimes 1)\bullet\mu(F[G]) \\ &\subseteq (F[G]\otimes 1)\bullet(F[G]\otimes F[G]) \\ &\subseteq F[G]\otimes F[G] \end{aligned}$$

4. <u>Schritt</u>. ψ ist ein F-Isomorphismus, d.h. $\psi^*(F[G]\otimes F[G]) = F[G]\otimes F[G])$.
Wir haben zu zeigen, auch ψ^{-1} ist über F definiert. Es gilt

$$\psi^{-1}(x,y) = (x, x^{-1}y),$$

d.h.

$$p_1\circ\psi^{-1} = p_1 \text{ und } p_2\circ\psi^{-1} = \mu\circ(i\times id),$$

also

$$\psi^{-1}{}^*\circ p_1^* = p_1^* \text{ und } \psi^{-1}{}^*\circ p_2^* = (i^*\otimes id)\circ \mu^*,$$

also

$$\psi^{-1*}(f\otimes 1) = f\otimes 1 \text{ und } \psi^{-1*}(1\otimes f) = (i^*\otimes id)(\mu^*(f)) \text{ für } f, g \in k[G].$$

Weil G eine F-Gruppe ist, sind die Komultiplikation μ^* und der Antipode i^* über F definiert, d.h. es ist

$$\begin{aligned}\psi^*(F[G]\otimes F[G]) &= (F[G]\otimes 1)\bullet (i^*\otimes id)(\mu^*(F[G]) \\ &\subseteq (F[G]\otimes 1)\bullet (i^*\otimes id)(F[G]\otimes F[G]) \\ &\subseteq (F[G]\otimes 1)\bullet i^*(F[G])\otimes id^*(F[G]) \\ &\subseteq (F[G]\otimes 1)\bullet F[G]\otimes F[G] \\ &\subseteq F[G]\otimes F[G]\end{aligned}$$

5. <u>Schritt</u>. Die Diagonalabbildung Δ_G ist über F definiert, d.h. es gilt

$$\Delta^*_G(F[G]\otimes F[G]) \subseteq F[G].$$

Der durch Δ_G induzierte k-Algebra-Homomorphismus

$$\Delta^*_G\colon k[G]\otimes_k k[G] \longrightarrow k[G],\ (f,g) \mapsto f\bullet g,$$

ist gerade durch die Mulitplikation[15] der k-Algebra k[G] definiert. Weil $F[G] \subseteq k[G]$ eine Teilalgebra von k[G], ist F[G] insbesondere multiplikativ abgeschlossen, d.h. es gilt $\Delta^*_G(F[G]\otimes F[G]) \subseteq F[G]$.

6. <u>Schritt</u>. i_1 ist über F definiert, d.h. $i^*_1(F[G]\otimes F[G]) \subseteq F[G]$.

Wir können i_1 als Zusammensetung

$$G \xrightarrow{\Delta_G} G\times G \xrightarrow{id\times\varepsilon} G\times G$$

$$x \mapsto (x,x) \mapsto (x,e)$$

schreiben, wobei ε die Projektion auf das neutrale Element e ist. Damit ist

$$i^*_1 = \Delta^*_G\circ(id\otimes\varepsilon^*)\colon k[G]\otimes_k k[G] \xrightarrow{id\otimes\varepsilon^*} k[G]\otimes k[G] \xrightarrow{\Delta_G} k[G]$$

$$f\otimes g \mapsto f\otimes g(e) \mapsto f\bullet g(e).$$

nach dem fünften Schritt reicht es zu zeigen $id\otimes\varepsilon$ ist über F definiert, d.h.

$$(id\otimes\varepsilon^*)(F[G]\otimes F[G]) \subseteq F[G]\otimes F[G].$$

Nun ist $\varepsilon^*\colon k[G]\longrightarrow k[G],\ f \mapsto f(e)$, gerade die Auswertung im neutralen Element. Weil G eine F-Gruppe ist, ist e ein F-rationaler Punkt, d.h. es gilt

$$\varepsilon^*(F[G]) \subseteq F.$$

Es folgt

$$(id\otimes\varepsilon^*)(F[G]\otimes F[G]) = id(F[G])\otimes\varepsilon^*(F[G]) \subseteq F[G]\otimes F \subseteq F[G]\otimes F[G].$$

---

[15] Wegen $p_1\circ\Delta_G = id$ und $p_2\circ\Delta_G = id$ gilt $\Delta^*_G\circ p^*_1 = id$ und $\Delta^*_G\circ p^*_2 = id$, also

$$\Delta^*_G(f\otimes 1) = f \text{ und } \Delta^*_G(1\otimes f) = f,$$

also

$$\Delta^*_G(f\otimes g) = \Delta^*_G((f\otimes 1)\bullet(1\otimes g)) = \Delta^*_G(f\otimes 1)\bullet \Delta^*_G(1\otimes g) = f\bullet g.$$

7. Schritt. Φ ist über F definiert.
Auf Grund der Schritte vier, fünf und sechs erhält man aus dem kommutativen Diagramm (5) durch Einschränken auf die F-Strukturen ein komutatives Diagramm von F-Algebra-Homomorphismen

$$\begin{tikzcd} F[G] \arrow[r, phantom, "="] & F[G] \\ F[G]\otimes_F F[G] \arrow[u, "i_1^*(F)"] & F[G]\otimes_F F[G] \arrow[l, "\psi^*(F)"', "\cong"] \arrow[u, "\Delta_G^*(F)"'] \end{tikzcd} \tag{6}$$

mit

$$\begin{aligned} i_1^*(F) &:= i_1^*|_{F[G]\otimes_F F[G]} \\ \Delta_G^*(F) &:= \Delta_G^*|_{F[G]\otimes_F F[G]} \\ \psi^*(F) &:= \psi^*|_{F[G]\otimes_F F[G]} \end{aligned} \tag{7}$$

Man beachte, nach dem vierten Schritt ist die Einschränkung $\psi^*(F)$ des Isomorphismus ψ^* tatsächlich ein Isomorphismus.
Wir setzen

$$I_F \quad := \mathrm{Ker}(\Delta_G^*(F): F[G]\otimes_F F[G] \longrightarrow F[G],\ f\otimes g \mapsto f\bullet g)$$

Auf Grund der Kommutativität des Diagramms (6) gilt

$$\psi^*(F)(I_F) \quad = \mathrm{Ker}\ i_1^*(F): F[G]\otimes_F F[G] \longrightarrow F[G],\ f\otimes g \mapsto f\bullet g(e))$$

Zur Berechnung des Kerns auf der rechten Seite wählen wir eine F-Vektorraumbasis $\{\omega_i\}_{i\in I}$ von F[G]. Jedes Element von $F[G]\otimes_F F[G]$ läßt sich dann in der Gestalt

$$\alpha = \sum_{i\in I} \omega_i\otimes f_i$$

schreiben mit eindeutig bestimmten $f_i\in F[G]$. Liegt dieses Element liegt im Kern der Abbildung $i_1^*(F)$, so gilt

$$\sum_{i\in I} \omega_i\bullet f_i(e) = 0$$

Weil e ein F-rationaler Punkt der F-Gruppe G ist, gilt $f_i(e) \in F$, und weil die ω_i linear unabhängig über F sind, folgt $f_i(e) = 0$ für jedes i, d.h.

$$f_i \in F[G]\cap M_e = M_e(F)$$

(nach Definition von M_e und $M_e(F)$), also

$$\alpha \in F[G]\otimes M_e(F).$$

Umgekehrt liegt jedes Element von $F[G]\otimes M_e(F)$ im Kern von $i_1^*(F)$ (auf Grund der Abbildungsvorschrift von $i_1^*(F)$ und der Definition von $M_e(F)$. Wir haben gezeigt,

$$\psi^*(F)(I_F) \qquad = F[G]\otimes M_e(F).$$

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\psi^*|_I", "\cong"'] & k[G]\otimes_k M_e \\ I_F \arrow[u, hook] \arrow[r, "\cong", "\psi^*(F)|_{I_F}"'] & F[G]\otimes_F M_e(F) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Nach Definition der Differentialmoduln ist $I/I^2 = \Omega_G$ und $I_F/I_F^2 = \Omega_G(F)$. Wie bei der Konstruktion von Φ erhalten wir Abbildungen $\widetilde{\Phi}$ und $\widetilde{\Phi}(F)$ für welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Omega_G \arrow[r, "\widetilde{\Phi}"] & k[G]\otimes_k(M_e/M_e^2) \\ \Omega_G(F) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\widetilde{\Phi}(F)"] & F[G]\otimes_F(M_e(F)/M_e(F)^2) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Wie im obigen Beweis identifizieren wir M_e/M_e^2 mit $(T_eG)^*$ vermittels der Abbildung

$$M_e/M_e^2 \xrightarrow{\cong} (T_eG)^*,\ f \bmod M_e^2 \mapsto (X \mapsto X(f)).$$

(vgl. 4.1.4) und vermittels der natürlichen Einbettung des zweiten Schritts

$$(T_eG)^*(F) = M_e(F)/M_e(F)^2 \hookrightarrow M_e/M_e^2$$

$$f \bmod M_e(F)^2 \mapsto f \bmod M_e^2$$

den Vektorraum $(T_eG)^*(F)$ mit dessen Bild in $(T_eG)^*$ und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Omega_G \arrow[r, "\Phi"] & k[G]\otimes_k(T_eG)^* \\ \Omega_G(F) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\Phi(F)"] & F[G]\otimes_F(T_eG)^*(F) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

welches zeigt, daß Φ über F definiert ist.
QED.

4.4.3 Lie-Algebren 70

4.4.3A Definitionen

Sei F eine kommutative Algebra mit 1. Eine nicht-notwendig assoziative Algebra über F ist ein F-Modul A zusammen mit einer über F bilinearen Abbildung

$$A \times A \longrightarrow A,\ (x,y) \mapsto x\cdot y,$$

welche Produkt der Algebra A heißt, mit

$$c\cdot(xy) = (c\cdot x)\cdot y = x\cdot(cy) \text{ für } c \in F,\ x, y \in A.$$

Wir nehmen nicht an, daß A ein Einselement besitzt. Eine Teilalgbra von A ist ein Teilmodul mit der Eigenschaft, daß das Produkt von je zwei Elementen des Teilmoduls im Teilmodul liegt. Eine Teilalgebra B von A heißt linkes bzw. rechtes Ideal von A, wenn die folgende Implikation besteht.

$$x \in A \text{ und } y \in B \Rightarrow xy \in B \text{ (bzw. } x \in A \text{ und } y \in B \Rightarrow yx \in B).$$

Ein zweiseitiges Ideal von A ist eine Teilalgebra, welche sowohl linkes als auch rechtes Ideal von A ist. Für jedes zweiseitige Ideal B von A besitzt der Faktormodul

$$A/B$$

die Struktur einer nicht-notwendig assoziativen Algebra über F mit

$$[x \bmod B, y \bmod B] := [x,y] \bmod B.$$

Der Faktormodul mit dieser Struktur heißt Faktoralgebra von A.
Eine Lie-Algebra übe F ist eine nicht-notwendig assoziative Algebra über F, deren Produkt wir mit

$$[]: A \times A \longrightarrow A, (x,y) \mapsto [x, y],$$

bezeichnen und welches den beiden folgenden Bedingungen genügt.

1. $[x, x] = 0$ für $x \in A$.
2. $[[x,y],z] + [[y,z],x]+ [[z,x],y] = 0$ für $x,y,z \in A$.

Wir nennen $[x,y]$ auch Kommutator von x und y oder auch Lie-Klammer von x und y. Die zweite Bedingung heißt Jacobi-Identität.

Eine Lie-Algebra heißt kommutativ, wenn der Kommutator von je zwei Elementen gleich 0 ist.

Sei F ein Körper der Charakteristikt $p > 0$. Eine p-Operation auf einer Lie-Algebra A über F ist eine Abbildung

$$A \longrightarrow A, D \mapsto D^{[p]},$$

mit den folgenden Eigenschaften.

a. $(a\bullet D)^{[p]} = a^p D^{[p]}$ für $a \in F$ und $D \in A$.

b. $\operatorname{ad} D^{[p]} = (\operatorname{ad} D)^p$ für $D \in A$.

Dabei sei $(\operatorname{ad} D)(D') = [D,D']$ für $D,D' \in A$.

c. Formel von Jacobson. $(D+D')^{[p]} = D^{[p]} + D'^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} i^{-1}\bullet s_i(D,D')$ für $D,D' \in A$.

Dabei sei $s_i(D,D')$ der Koeffizient von a^{i-1} in $(\operatorname{ad}(D+aD'))^{p-1}(D')$.[16]

---

[16] Im Buch von Springer wird $s_i(D,D')$ definiert als der Koeffizient von a^i in $\operatorname{ad}(aD+D')^{p-1}(D')$.

Bei Borel [3], Kapitel I, §3, Abschnitt 3.1 (russische Ausgabe) ist $s_i(D,D')$ der Koeffizient von a^i in

$$\operatorname{ad}(aD+D')^{p-1}$$

was schlecht dazu paßt, daß $s_i(D,D'$ ein Element der Lie-Algebra ist und $(aD+D')^{p-1}$ eine auf der erweiterten Lie-Algebra $A\otimes_F F[a]$ definierte Abbildung. Die fehlenden Klammern sind leider weit verbreitet, aber mißverständlich.

Der Exponent von a^i und der Koeffizient a vor D anstelle von D' passen schlecht zu den Angaben im Buch von Bourbaki [2], zu unserem Beweisen in 4.3.3 G und zu den Wikipedia-Angaben im Mai 2021 (https://en.wikipedia.org/wiki/Restricted_Lie_algebra). Das Buch von Jacobson, Lie algebras, ist mir im Augenblick leider nicht zugänglich.

Eine eingeschränkte Lie-Algebra oder auch p-Lie-Algebra ist eine Lie-Algebra über F mit eine p-Operation.

Bemerkungen

(i) Aus Bedingung 1 und der Linearität folgt

$$[x,y] = - [y,x] \text{ für } x,y \in A.$$

(ii) Die Jacobi-Identität läßt sich in der Gestalt

$$[x, [y,z]] = [[x,y],z] + [y, [x, z]]$$

schreiben, d.h. [x, ?] ist bezüglich der Lie-Klammer eine Derivation (siehe unten).

(iii) Jede Teilalgebra einer Lie-Algebra ist eine Lie-Algebra.

(iv) Jede Faktoralgebra einer Lie-Algebra ist eine Lie-Algebra.

(v) Die hier angegebene Definition der p-Lie-Algebra ist nicht identisch mit der in Bourbaki [2], Kapitel 1, Aufgaben zu §1, Aufgabe 20 angegebenen, denn die in der Formel von Jacobson auf der rechten Seite auftretenden Koeffizienten werden in unterschiedlicher Weise beschrieben. In der Beschreibung von Bourbaki hat die Formel von Jacobson die Gestalt

$$\begin{aligned}(x+y)^p &= x^p + y^p + \sum_{i=1}^{p-1} (p-i)^{-1} g_{i,p-i-1}(\text{ad } x, \text{ad } y)(y).\\ &= x^p + y^p + \sum_{i=1}^{p-1} i^{-1} g_{p-i,i-1}(\text{ad } x, \text{ad } y)(y).\end{aligned}$$

(vgl. auch 4.4.3G (ii), Formel (7) und (8)). Dabei ist

$$g_{p-i,i-1}(x,y)$$

Koeffizient von $T_1^{p-i}T_2^{i-1}$ im Polynom $(xT_1+yT_2)^{p-1}$, d.h. der Koeffizient von U^{i-1} im Polynom

$$(x+yU)^{p-1}.$$

Das bedeutet,

$$g_{p-i,i-1}(\text{ad } x,\text{ad } y)(y)$$

ist der Koeffizient von U^{i-1} im Polynom

$$((\text{ad } x) + (\text{ad } y)\bullet U)^{p-1}(y) = (\text{ad } (x+yU))^{p-1}(y).$$

Das Gleichheitszeichen gilt in der erweiterten Algebra

$$A\otimes_F F[U],$$

die durch Tensorieren der Lie-Algebra A mit der Polynom-Algebra in einer Unbestimmten entsteht[17]. Damit stimmt die Definition von Bourbaki [2] mit der hier angegebenen überein,

$$s_i(x,y) = {}^{-1} g_{p-i,i-1}(\text{ad } x, \text{ad } y)(y).$$

Sie weicht von der Wikipedia-Definition

https://en.wikipedia.org/wiki/Restricted_Lie_algebra,

dahingehend ab, daß dort die Argumente x und y vertauscht sind. Das ist aber ohne Belang, da die linke Seite der Jacobson-Formel symmetrisch in x und y ist.

4.4.3B Beispiel: assoziative Algebren

Jede assoziative (nicht-notwendig kommuative) F-Algebra A besitzt die Struktur eine Lie-Algbra bezüglich des Lie-Algebra-Produkts

$$[x, y] := x\bullet y - y\bullet x.$$

Die erste Bedingung ist trivialerweise erfüllt. Die zweiter ergibt sich durch direktes Nachrechnen:

---

[17] Sie gilt für die Lie-Algebra-Struktur einer assoziativen Algebra, weil U mit allen Elementen der Algebra kommutiert.

$$
\begin{aligned}
&[[x,y],z] + [[y,z],x]+ [[z,x],y] \\
&\quad = [xy - yx, z] + [yz - zy, x] + [zx - xz, y] \\
&\quad = xyz - yxz - zxy + zyx \\
&\quad + yzx - zyx - xyz + xzy \\
&\quad + zxy - xzy - yzx + yxz \\
&\quad = 0.
\end{aligned}
$$

4.4.3C Beispiel: gl(E)

Sei E ein F-Modul und

$$A := \mathrm{End}_F E$$

die Algrebra der F-linearen Endomorphismen von E. Dann besitzt A die Struktur einer Lie-Algbra über F mit

$$[f, g] := f\circ g - g\circ f \text{ für } f, g \in A$$

(nach 4.4.3B). Sie heißt Lie-Algebta der Endomorphismen von E und wird mit

$$\mathbf{gl}(E)$$

bezeichnet. Im Fall $E = F^n$ schreibt man auch

$$\mathbf{gl}(n, F) := \mathbf{gl}(E).$$

4.4.3D Beispiel: Der A

Sei A eine nicht-notwendig assoziative F-Algebra. Eine Derivation von A ist eine F-lineare Abbildung

$$D: A \longrightarrow A$$

mit

$$D(xy) = (Dx)y + x(Dy) \text{ für } x,y \in A.$$

Die Menge der Derivationen von A wird mit

$$\mathrm{Der}\, A$$

bezeichnet. Sie besitzt die Struktur eine Lie-Algbra bezüglich der Lie-Klammer

$$[D', D''] := D'\circ D'' - D''\circ D' \text{ für } D', D'' \in \mathrm{Der}\, A.$$

Zum Beweis reicht es zu zeigen, daß [D', D''] eine Derivation ist (denn dann ist Der A eine Teilalgebra von **gl**(A). Für $x, y \in A$ gilt

$$
\begin{aligned}
[D', D''] (xy) &= D'\circ D''(xy) - D''\circ D'(xy) \\
&= D'((D''x)y + x(D''y) - D''((D'x)y + x(D'y)) \\
&= (D'\circ D''x)y + (D''x)(D'y) + (D'x)(D''y) + x(D'\circ D''y) \\
&\quad -(D''\circ D'x)y - (D'x)(D''y)-(D''x)(D'y) - x(D''\circ D'y) \\
&= ([D',D'']x)y + x([D',D'']y)
\end{aligned}
$$

4.4.3E Beispiel: $M_n(F)$

Die F-Algebra $M_n(F)$ der n×n-Matrizen mit Einträgen aus F hat die Struktur einer Lie-Algebra bezüglich der Lie-Klammer

$$[A,B] = A\bullet B - B\bullet A \text{ für } A,B \in M_n(F).$$

(nach 4.4.3B). Sie ist isomorph zu **gl**(n, F). Beispiele von Teilalgebren:

t(n, F)	die oberen Dreiecksmatrizen.
st(n, F)	die oberen Dreiecksmatrizen mit der Spur 0.

4.4.3F Beispiel einer p-Lie-Algebra

Seien k ein Körper der Charakteristik $p > 0$, A eine kommutative k-Algebra und

$$\mathcal{D} := \mathrm{Der}_k(A).$$

die Lie-Algebra von Beispiel 4.4.3D, d.h. die Lie-Algebra mit der Lie-Klammer

$$[D', D''] := D'\circ D'' - D''\circ D' \text{ für } D', D'' \in \mathcal{D}$$

Dann ist $\mathcal{D}$ sogar eine p-Lie-Algebra mit der p-Operation

$$D^{[p]} := D^p.$$

Beweis. 1. Schritt: Formel von Leibniz: Für jede Derivation

$$D: A \longrightarrow A$$

eines kommutativen assoziativen Algebra gilt

$$D^n(x\bullet y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\bullet D^i(x)\bullet D^{n-i}(y) \text{ für } x,y \in A.$$

Beweis durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: n = 1.

Die Aussage ist gerade die definierende Produktformel des Derivationen-Begriffs:

$$D(x\bullet y) = (Dx)\bullet y + x\bullet Dy.$$

Induktionsschritt: n > 1.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
D^n(x\bullet y) &= D(D^{n-1}(x\bullet x))\\
&= D(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}\bullet D^i(x)\bullet D^{n-1-i}(y))\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}\bullet(D^{i+1}(x)\bullet D^{n-1-i}(y) + D^i(x)\bullet D^{n-i}(y))\\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1}\bullet D^i(x)\bullet D^{n-i}(y) + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}\bullet D^i(x)\bullet D^{n-i}(y)\\
&=D^n(x)\bullet y + x\bullet D^n(y) + \sum_{i=1}^{n-1} (\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i})\bullet D^i(x)\bullet D^{n-i}(y)\\
&=D^n(x)\bullet y + x\bullet D^n(y) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}\bullet D^i(x)\bullet D^{n-i}(y)\\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\bullet D^i(x)\bullet D^{n-i}(y)
\end{aligned}$$

2. Schritt: D^p ist eine Derivation von A für jedes $D \in Der_k(A)$.

Für $x,y \in A$ gilt nach dem ersten Schritt

$$\begin{aligned}
D^p(x\bullet y) &= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\bullet D^i(x)\bullet D^{p-i}(y)\#\\
&= D^p(x)\bullet y + x\bullet D^p(y).
\end{aligned}$$

3. Schritt: Es gilt $(a\bullet D)^n = a^n\bullet D^n$ für $a \in k$ und $D \in Der_k(A)$ für $n = 1,2, ...$

Insbesondere ist Bedingung a für p-Lie-Algebren erfüllt.

Beweis durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: n = 1.

Die Aussage $a\bullet D = a\bullet D$ ist trivial.

Induktionsschritt: n > 1.

Als k-Derivation ist jedes $D \in Der_k(A)$ insbesondere k-linear. Also gilt für jedes $x\in A$

$$(a\bullet D)^n(x) \quad = (a\bullet D)\bullet((aD)^{n-1}(x))$$

$$
\begin{aligned}
&= (a\bullet D)\bullet(a^{n-1}\bullet D^{n-1}(x)) && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}\\
&= a\bullet(D(a^{n-1}\bullet D^{n-1}(x)))\\
&= a^n\bullet D(D^{n-1}(x)) && \text{(D ist k-linear)}\\
&= a^n\bullet D^n(x).
\end{aligned}
$$

Weil dies für jedes $x \in A$ gilt, folgt $(a\bullet D)^n = a^n\bullet D^n$.

4. <u>Schritt</u>. Für jedes $x \in \mathcal{D}$ gilt

$$(\mathrm{ad}\ x)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\bullet\binom{n}{i}\bullet L_x^i R_x^{n-i}.$$

Dabei sollen L_x und R_x die Multiplikation von Links bzw. Rechts mit x in der assoziativen Algebra $\mathcal{D}$ bezüglich der Zusammensetzung von Abbildungen sein, d.h. die Abbildungen

$$L_x: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D},\ d \mapsto x\circ d, \text{ bzw. } R_x: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D},\ d \mapsto d\circ x.$$

Beweis durch Induktion nach n.
<u>Induktionsanfang</u>: n = 1.
Mit Hilf der eingeführten Bezeichnungen ist

$$(\mathrm{ad}\ x)(y) = x\circ y - y\circ x = L_x(y) - R_x(y) = (L_x-R_x)(y),$$

also

$$\mathrm{ad}\ x = L_x-R_x.$$

Das ist gerade die Behauptung für n = 1.
<u>Induktionsschritt</u>: n > 1.
Es gilt

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{ad}\ x)^n &= (\mathrm{ad}\ x)((\mathrm{ad}\ x)^{n-1}(y))\\
&= (L_x - R_x)\Big(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-1-i}\bullet\binom{n-1}{i}\bullet L_x^i R_x^{n-1-i}\Big) \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-1-i}\bullet\binom{n-1}{i}\bullet L_x^{i+1}R_x^{n-1-i} - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-1-i}\bullet\binom{n-1}{i}\bullet L_x^i R_x^{n-i}\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\bullet\binom{n-1}{i-1}\bullet L_x^i R_x^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-1-i}\bullet\binom{n-1}{i}\bullet L_x^i R_x^{n-i}\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\bullet\binom{n-1}{i-1}\bullet L_x^i R_x^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}\bullet\binom{n-1}{i}\bullet L_x^i R_x^{n-i}\\
&= L_x^n + (-1)^n R_x^n + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}\bullet\binom{n-1}{i-1}\bullet L_x^i R_x^{n-i} + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}\bullet\binom{n-1}{i}\bullet L_x^i R_x^{n-i}\\
&= L_x^n + (-1)^n R_x^n + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}\bullet\Big(\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\Big)\bullet L_x^i R_x^{n-i}\\
&= L_x^n + (-1)^n R_x^n + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}\bullet\binom{n}{i}\bullet L_x^i R_x^{n-i}\\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\bullet\binom{n}{i}\bullet L_x^i R_x^{n-i}
\end{aligned}
$$

5. <u>Schritt</u>. Es gilt $\mathrm{ad}\ D^p = (\mathrm{ad}\ D)^p$ für $D \in \mathrm{Der}_k(A)$ (mit $(\mathrm{ad}\ D)(D') = [D,D']$)

Insbesondere ist Bedingung b für p-Lie-Algebren erfüllt.
Nach dem vierten Schritt gilt

$$(\mathrm{ad}\ x)^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i}\cdot\binom{p}{i}\cdot L_x^i R_x^{p-i}.$$

Weil die Charakteristik von k gleich p ist, sind die Binomialkoeffizienten in der Summe rechts nur für i = 0 und i = p von Null verschieden:

$$(\mathrm{ad}\ x)^p = (-1)^p R_x^p + L_x^p.$$

Ist p die gerade Primzahl, so ist -1 = +1 in K. Ansonsten ist $(-1)^p = -1$. In beiden Fällen gilt also

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\ x)^p &= L_x^p - R_x^p\\ &= L_{x^p} - R_{x^p}\\ &= \mathrm{ad}\ x^p.\end{aligned}$$

6. <u>Schritt</u>. Für beliebige $x,y \in \mathcal{D}$ gilt $(\mathrm{ad}\ x)^{p-1}(y) \quad = \sum_{i=0}^{p-1} x^i \circ y \circ x^{p-i-1}$.

Nach dem 4. Schritt gilt

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\ x)^{p-1}(y) &= \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{p-i-1}\cdot\binom{p-1}{i}\cdot L_x^i R_x^{p-i-1}(y)\\ &= \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{p-i-1}\cdot\binom{p-1}{i} x^i y x^{p-i-1}\end{aligned}$$

Weil die Charakteristik von k gleich der Primzahl p ist, gilt in K:

$$\binom{p-1}{i} = \frac{(p-1)!}{i!\cdot(p-i-1)!} = \frac{(p-1)\cdot(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-i)}{i!} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-i)}{i!} = (-1)^i$$

also

$$(-1)^{p-i-1}\cdot\binom{p-1}{i} = (-1)^{p-1}$$

Nun ist -1 = +1 im Fall p = 2 und ansonsten p ungerade. In beiden Fällen ist somit in K

$$(-1)^{p-i-1}\cdot\binom{p-1}{i} = 1.$$

Es folgt

$$(\mathrm{ad}\ x)^{p-1}(y) \quad = \sum_{i=0}^{p-1} x^i y x^{p-i-1}$$

wie behauptet.
7. <u>Schritt</u>. Die Formel von Jacobson.
Eine Anleitung zum Beweis der Formel von Jacobson findet man in den Übungsaufgaben 19 und 20 zu Kapitel §1, Kapitel I von Bourbaki [2]. Aus dieser Anleitung ergibt sich, daß jede assoziative Algebra über einem Körper der Charakteristik $p \neq 0$ die Struktur einer p-Algebra besitzt. Den Beweis der Formel von Jacobson formulieren wir deshalb nachfolgend als Lemma dessen Aussage gerade die der erwähnten Aufgabe 19 ist. Die anschließende Aussage entspricht gerade dem Inhalt der erwähnten Aufgabe 20.
QED.

4.4.3G Lemma

(i) Sei L eine assoziative Algebra über dem Körper K. Für vorgegebene k Elemente

$$x_1,\ldots, x_k \in L$$

schreiben wir

$$f_k(x_1,\ldots, x_k) = \sum_{\sigma\in S_k} x_{\sigma(1)}\bullet\ldots\bullet x_{\sigma(k)}$$

wobei S_k die Gruppe der Permutationen von $\{1,\ldots,k\}$ bezeichne. In der Algebra

$$L\otimes_K K[T_1,\ldots,T_k]$$

mit Unbestimmten T_i ist $f_k(x_1,\ldots, x_k)$ der Koeffizient von $T_1\bullet\ldots\bullet T_k$ im Polynom

$$(x_1T_1+\ldots+x_kT_k)^k$$

also auch der Koeffizient von $T_1\bullet\ldots\bullet T_k$ im Polynom

$$\sum_{j=0}^{k-1}(x_1T_1+\ldots+x_{k-1}T_{k-1})^j\bullet x_kT_k\bullet(x_1T_1+\ldots+x_{k-1}T_{k-1})^{k-j-1}.$$

Für je zwei Elemente $x,y \in L$ definieren wir

$$g_{i,k-i}(x,y)$$

als den Koeffizienten von $T_1^iT_2^{k-i}$ im Polynom $(xT_1+yT_2)^k$.Zeigen Sie, es gilt

$$i!\bullet(k-i)!\bullet g_{i,k-i}(x,y) = f_k(t_1,\ldots, t_k) \qquad (1)$$

mit

$$t_h := \begin{cases} x \text{ für } h \le i \\ y \text{ für } i < h \end{cases}$$

(ii) Wenn wir L als K-Algebra betrachten, so erhalten wir im Raum $\mathcal{L}_K(L)$ der K-linearen Endomorphismen von L

$$(\mathrm{ad}\ x)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\bullet\binom{n}{i}\bullet L_x^iR_x^{n-i}, \qquad (2)$$

wenn L_x die Multiplikation mit x von Links und R_x die Multiplikation mit x von Rechts bezeichnet. Beweisen Sie mit Hilfe dieser Identität im Fall daß K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ ist (d.h. p ist eine Primzahl) die folgenden Identitäten

$$(\mathrm{ad}\ x)^p(y) = (\mathrm{ad}\ x^p)(y) \qquad (3)$$

$$(\mathrm{ad}\ x)^{p-1}(y) = \sum_{i=0}^{p-1} x^iyx^{p-i-1} \qquad (4)$$

Zeigen Sie weiter mit Hilfe von (4), es gilt

$$f_{p-1}(\mathrm{ad}\ x_1,\ldots,\mathrm{ad}\ x_{p-1})(y) = f_p(x_1,\ldots,x_{p-1}, y) \qquad (5)$$

und

$$g_{i,p-i-1}(\mathrm{ad}\ x, \mathrm{ad}\ y)(y) = (p-i)\bullet g_{i,p-i}(x,y). \qquad (6)$$

Folgern Sie, für beliebige $x,y \in L$ gilt

$$(x+y)^p = x^p + y^p + \Lambda_p(x,y) \qquad (7)$$

mit

$$\Lambda_p(x,y) = \sum_{i=1}^{p-1}(p-i)^{-1}g_{i,p-i-1}(\mathrm{ad}\ x, \mathrm{ad}\ y)(y). \qquad (8)$$

Dabei liegt $\Lambda_p(x,y)$ in der von x und y erzeugten Lie-Teilalgebra von L.

(vgl. Bourbaki [2], Kapitel I, Aufgabe 19 zu §1)

Beweis. Zu (i). Wir setzen

$$U := T_1 + \ldots + T_i \text{ und } V := T_{i+1} + \ldots + T_k$$

Für

$$x_1 = \ldots = x_i := x \text{ und } x_{i+1} = \ldots = x_k = y$$

gilt dann

$$(x_1T_1 + \ldots + x_kT_k)^k = (x\cdot U + y\cdot V)^k$$

$$= \sum_{i+j=k} g_{i,j}(x,y)\cdot U^i\cdot V^j \qquad \text{(nach Definition der } g_{i,j}\text{)},$$

und nach dem polynomischen Lehrsatz ist

$$U^i\cdot V^j = (T_1 + \ldots + T_i)^i\cdot(T_{i+1} + \ldots + T_k)^j$$

$$= \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_i=i} \frac{i!}{\nu_1!\cdot\ldots\cdot\nu_i} T_1^{\nu_1}\ldots T_i^{\nu_i} \cdot \sum_{\nu_{i+1}+\ldots+\nu_k=k-i} \frac{(k-i)!}{\nu_{i+1}!\cdot\ldots\cdot\nu_k} T_{i+1}^{\nu_{i+1}}\ldots T_k^{\nu_k}$$

In $U^i\cdot V^j$ kommt $T_1\cdot\ldots\cdot T_k$ mit dem Koeffizienten $i!\cdot(k-i)!$ vor (alle Exponenten sind 1). In

$$U^{i'}V^{j'} = (T_1 + \ldots + T_i)^{i'}\cdot(T_{i+1} + \ldots + T_k)^{j'}$$

mit $i'+j' = k$ und $(i',j') \neq (i,j)$ kommt $T_1\cdot\ldots\cdot T_k$ mit dem Koeffizienten 0 vor.[18] Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$f_k(t_1,\ldots,t_k) = i!\cdot(k-i)!\cdot g_{i,k-i}(x,y).$$

Zu (ii).

1. Schritt: Beweis von (2).

Nach Definition gilt

$$(\mathrm{ad}\ x)(y) = xy - yx,$$

also

$$\mathrm{ad}\ x = L_x - R_x.$$

Induktiv folgt:

$$(\mathrm{ad}\ x)^n = (\mathrm{ad}\ x)((\mathrm{ad}\ x)^{n-1}(y))$$

$$= (L_x - R_x)\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-1-i}\cdot\binom{n-1}{i}\cdot L_x^iR_x^{n-1-i}\right) \quad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-1-i}\cdot\binom{n-1}{i}\cdot L_x^{i+1}R_x^{n-1-i} - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-1-i}\cdot\binom{n-1}{i}\cdot L_x^iR_x^{n-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\cdot\binom{n-1}{i-1}\cdot L_x^iR_x^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-1-i}\cdot\binom{n-1}{i}\cdot L_x^iR_x^{n-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\cdot\binom{n-1}{i-1}\cdot L_x^iR_x^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}\cdot\binom{n-1}{i}\cdot L_x^iR_x^{n-i}$$

$$= L_x^n + (-1)^nR_x^n + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}\cdot\binom{n-1}{i-1}\cdot L_x^iR_x^{n-i} + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}\cdot\binom{n-1}{i}\cdot L_x^iR_x^{n-i}$$

---

[18] $T_1\cdot\ldots\cdot T_k$ ist homogen vom Grad i in den ersten i Unbestimmten. Auf der rechten Seite steht aber ein homogenes Polynom des Grades $i' \neq i$ in diesen Unbestimmten.

$$= L_x^n + (-1)^n R_x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \cdot \left(\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}\right) \cdot L_x^i R_x^{n-i}$$
$$= L_x^n + (-1)^n R_x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \cdot \binom{n}{i} \cdot L_x^i R_x^{n-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \cdot \binom{n}{i} \cdot L_x^i R_x^{n-i}$$

2. <u>Schritt</u>. Beweis von (3).
Auf Grund von (2) gilt

$$(\mathrm{ad}\ x)^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \cdot \binom{p}{i} \cdot L_x^i R_x^{p-i}.$$

Weil die Charakteristik von K gleich p ist, sind die Binomialkoeffizienten in der Summe rechts nur für i = 0 und i = p von Null verschieden:

$$(\mathrm{ad}\ x)^p = (-1)^p R_x^p + L_x^p.$$

Ist p die gerade Primzahl, so ist -1 = +1 in K. Ansonsten ist $(-1)^p = -1$. In beiden Fällen gilt also

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\ x)^p &= L_x^p - R_x^p \\ &= L_{x^p} - R_{x^p} \\ &= \mathrm{ad}\ x^p\end{aligned}$$

3. <u>Schritt</u>. Beweis von (4).
Auf Grund von (2) gilt

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\ x)^{p-1}(y) &= \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{p-i-1} \cdot \binom{p-1}{i} \cdot L_x^i R_x^{p-i-1}(y) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{p-i-1} \cdot \binom{p-1}{i} x^i y x^{p-i-1}\end{aligned}$$

Weil die Charakteristik von K gleich der Primzahl p ist, gilt in K:

$$\binom{p-1}{i} = \frac{(p-1)!}{i! \cdot (p-i-1)!} = \frac{(p-1)\cdot(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-i)}{i!} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-i)}{i!} = (-1)^i$$

also

$$(-1)^{p-i-1} \cdot \binom{p-1}{i} = (-1)^{p-1}$$

Nun ist -1 = +1 im Fall p = 2 und ansonsten p ungerade. In beiden Fällen ist somit in K

$$(-1)^{p-i-1} \cdot \binom{p-1}{i} = 1.$$

Es folgt

$$(\mathrm{ad}\ x)^{p-1}(y) = \sum_{i=0}^{p-1} x^i y x^{p-i-1}$$

wie behauptet.
4. <u>Schritt</u>. Beweis von (5).
Nach Definition von f_k in Aufgabe (i) ist

$$f_p(x_1, \ldots, {}_{p-1}, y)$$

der Koeffizient von $T_1 \cdot \ldots \cdot T_p$ in

$$(x_1 \cdot T_1 + \ldots + x_{p-1} \cdot T_{p-1} + y \cdot T_p)^p$$

bzw. in

$$\sum_{j=0}^{p-1}(x_1T_1+...+x_{p-1}T_{p-1})^j\bullet yT_p\bullet(x_1T_1+...+x_{p-1}T_{p-1})^{k-j-1}$$

also der Koeffizient von $T_1\bullet...\bullet T_{p-1}$ in

$$\sum_{j=0}^{p-1}(x_1T_1+...+x_{p-1}T_{p-1})^j\bullet y\bullet(x_1T_1+...+x_{p-1}T_{p-1})^{k-j-1}$$

Nach Formel (4) mit $x_1T_1+...+x_{p-1}T_{p-1}$ anstelle von x und mit $L\otimes_K K[T_1,...,T_{p-1}]$ anstelle von L ist diese Summe gleich $(\mathrm{ad}\ x_1T_1+...+x_{p-1}T_{p-1})^{p-1}(y)$. Deshalb ist

$$f_p(x_1,...,_{p-1}, y)$$

der Koeffizient von $T_1\bullet...\bullet T_{p-1}$ in

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}(x_1T_1+...+x_{p-1}T_{p-1}))^{p-1}(y) &= (\mathrm{ad}(x_1T_1) + ... + \mathrm{ad}(x_1T_1))^{p-1}(y)\\ &= ((\mathrm{ad}\ x_1)T_1+...+ (\mathrm{ad}\ x_{p-1})T_{p-1})^{p-1}(y)\end{aligned}$$

ist. Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil die T_i mit allen Elementen kommutieren.
Wir wenden (i) auf die assoziative K-Algebra $\mathcal{L}_K(L)$ der K-linearen Endomorphismen von L und die Elemente $\mathrm{ad}\ x_1,...,\mathrm{ad}\ x_{p-1} \in \mathcal{L}_K(L)$ an. Wir erhalten, der Koeffizient von $T_1\bullet...\bullet T_{p-1}$ in

$$((\mathrm{ad}\ x_1)T_1+...+(\mathrm{ad}\ x_{p-1})T_{p-1})^{p-1} \in \mathcal{L}_K(L)\otimes_K K[T_1,...,T_{p-1}]$$

ist

$$f_{p-1}(\mathrm{ad}\ x_1, ... , \mathrm{ad}\ x_{p-1}),$$

d.h. der Koeffizient von $T_1\bullet...\bullet T_{p-1}$ in

$$((\mathrm{ad}\ x_1)T_1+...+(\mathrm{ad}\ x_{p-1})T_{p-1})^{p-1}(y) \in L\otimes_K K[T_1,...,T_{p-1}]$$

ist

$$f_p(\mathrm{ad}\ x_1,..., \mathrm{ad}\ x_{p-1})(y)$$

Zusammen erhalten wir

$$f_p(x_1,...,_{p-1}, y) = f_p(\mathrm{ad}\ x_1,..., \mathrm{ad}\ x_{p-1})(y),$$

d.h. es gilt (5).
5. Schritt. Beweis von (6).
Formel (5),

$$f_{p-1}(\mathrm{ad}\ x_1,...,\mathrm{ad}\ x_{p-1})(y) = f_p(x_1,...,x_{p-1}, y)$$

mit $x_1 = x_2 = ... = x_i = x$ und $x_{i+1} = ... = x_{p-1} = y$ ist nach (1) äquivalent zu

$$i!\bullet(p-i-1)!\bullet g_{i,p-i-1}(\mathrm{ad}\ x,\mathrm{ad}\ y)(y) = i!\bullet(p-i)!\bullet g_{i,p-i}(x,y).$$

Wegen $0 \le i \le p-1$ sind i! und (p-i-1)! Einheiten in K. Deshalb gilt auch

$$g_{i,p-i-1}(\mathrm{ad}\ x,\mathrm{ad}\ y)(y) = (p-i)\bullet g_{i,p-i}(x,y),$$

d.h. es gilt (6).
6. Schritt. Beweis von (7).
Nach Definition von $g_{i,p-i}(x,y)$ gilt in $L\otimes_K K[T_1, T_2]$

$$(x\cdot T_1+y\cdot T_2)^p = \sum_{i=0}^{p} g_{i,p-i}(x,y)\cdot T_1^i T_2^{p-i}$$
$$= x^p\cdot T_1^p+y^p\cdot T_2^p + \sum_{i=1}^{p-1} g_{i,p-i}(x,y)\cdot T_1^i T_2^{p-i}.$$

Zusammen mit (6) erhalten wir

$$(x\cdot T_1+y\cdot T_2)^p = x^p\cdot T_1^p+y^p\cdot T_2^p + \sum_{i=1}^{p-1} (p-i)^{-1} g_{i,p-i-1}(\text{ad } x, \text{ad } y)(y)\cdot T_1^i T_2^{p-i}$$

Auf beiden Seiten steht dasselbe Polynom. Wenn wir für die T_i spezielle Elemente von von L einsetzen erhalten wir dieselben Werte. Speziell für $T_1 = T_2 = 1$ erhalten wir Formel (7) (und (8)).

QED.

4.4.3H Eigenschaften p-Lie-Algebren

Sei **g** eine Lie-Algebra über dem Körper K der Charakteristik p > 0 (d.h. p ist eine Primzahl). Eine Abbildung

$$\mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g},\ x \mapsto x^{[p]},$$

der Lie-Algebra in sich heißt p-<u>Abbildung</u>, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. $\text{ad } x^{[p]} = (\text{ad } x)^p$ für jedes $x \in \mathbf{g}$.
2. $(\lambda\cdot x)^{[p]} = \lambda^p\cdot x^{[p]}$ für jedes $x \in \mathbf{g}$ und jedes $\lambda\in K$.
3. $(x+y)^{[p]} = x^{[p]}+y^{[p]}+\Lambda_p(x,y)$ für $x,y\in\mathbf{g}$ (vgl. Aufgabe 4.4.3G).

Eine p-<u>Lie-Algebra</u> über dem Körper K der Charakteristik p > 0 ist eine Lie-Algbra über K, welche mit einer p-Abbildung versehen ist.

Bemerkung

Auf Grund von Aufgabe 4.4.3G besitzt jede assoziative Algebra L über einem Körper der Charakteristik p > 0 die Struktur einer p-Lie-Algebra mit

$$[x, y] := xy - yx \text{ und } x^{[p]} = x^p.$$

Ein p-<u>Homomorphismus</u> (über dem Körper K der Charakteristik p > 0) ist eine Abbildung

$$u: \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g}'$$

einer p-Lie-Algbra g mit Werten in einer p-Lie-Algebra g’, wenn u ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist, d.h. eine K-lineare Abbildung mit

$$u([x,y]) = [u(x), u(y)] \text{ für } x, y \in \mathbf{g},$$

und wenn u zusätzlich mit den p-Abbildungen kommutiert, d.h.

$$u(x^{[p]}) = u(x)^{[p]} \text{ für } x \in \mathbf{g}.$$

Aufgabe

Zeigen Sie, für jede p-Lie-Algebra **g** hat jede p-Abbildung

$$u: \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g}$$

die Gestalt

$$u(x) = x^{[p]} + f(x)$$

mit einer Abbildung f: **g** ⟶ **g**, deren Werte im Zentrum von **g** liegen und welche <u>halblinear</u> bezüglich des Körper Endomorphismus $K \longrightarrow K,\ \lambda \mapsto \lambda^p$, ist, d.h.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ und } f(\lambda\cdot x) = \lambda^p\cdot f(x)$$

für $x,y \in g$ und $\lambda\in K$.

Allgemeiner, ist v: $\mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g}'$ ein Homomorphismus der p-Algebra $\mathbf{g}$ mit Werten in der p-Algebra $\mathbf{g}'$, so liegt $v(x^{[p]}) - (v(x))^{[p]}$ für jedes $x \in \mathbf{g}$ im Zentrum von $\mathbf{g}'$.
Beweis. Wir setzen

$$f(x) := u(x) - x^{[p]}$$

für jedes $x \in \mathbf{g}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}[f(x), f(x)] &= [u(x)-x^{[p]}, u(x)-x^{[p]}] \\ &= -[u(x), x^{[p]}] - [x^{[p]},u(x)] \\ &= 0,\end{aligned}$$

d.h. die Werte von f liegen im Zentrum von $\mathbf{g}$. Die Abbildung f ist <u>additv</u>, d.h.

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

weil für u und $x \mapsto x^{[p]}$ additive Abbildungen sind. Für $\lambda \in K$ und $x \in \mathbf{g}$ gilt

$$\begin{aligned}f(\lambda\bullet x) &= u(\lambda\bullet x) - (\lambda\bullet x)^{[p]} \\ &= \lambda^p\bullet u(x) - \lambda^p\bullet x^{[p]} \quad \text{(u und } x \mapsto x^{[p]} \text{ sind p-Abbildungen)} \\ &= \lambda^p\bullet f(x),\end{aligned}$$

d.h. f ist halblinear.
Im allgemeinen Fall erhalten wir

$$\begin{aligned}[v(x^{[p]}) - (v(x))^{[p]}, v(x^{[p]}) - (v(x))^{[p]}] &= -[v(x^{[p]}), (v(x))^{[p]}]-[(v(x))^{[p]}, v(x^{[p]})] \\ &= 0.\end{aligned}$$

QED.

4.4.31 Lie-Algebren algebraischer Gruppen 71

Seien G eine lineare algebraische Gruppe und

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_G := \mathrm{Der}_k(k[G]) = \mathrm{Der}_k(k[G], k[G])$$

(vgl. 4.4.3 F). Dann definieren die linken und rechten Translationen mit Elementen aus G Darstellungen

$$\lambda: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(k[G]),\ g \mapsto \lambda(g), \text{ mit } (\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}\bullet x) \text{ für } f\in k[G], g,x\in G$$

und

$$\rho: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(k[G]),\ g \mapsto \rho(g), \text{ mit } (\rho(g)f)(x) = f(xg) \text{ für } f\in k[G],\ g,x \in G$$

von G in k[G] (vgl. 4.4.1A) und damit auch Darstellungen von G in $\mathcal{D}$, die wir mit denselben Buchstaben bezeichnen,

$$\lambda: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(\mathcal{D}_G),\ g \mapsto \lambda(g), \text{ mit } \lambda(g)(D) = \lambda(g)\circ D\circ\lambda(g)^{-1} \text{ für } D\in\mathcal{D}_G$$

$$\rho: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(\mathcal{D}_G),\ g \mapsto \rho(g), \text{ mit } \rho(g)(D) = \rho(g)\circ D\circ\rho(g)^{-1} \text{ für } D\in\mathcal{D}_G.$$

Dann heißt die Menge der <u>linksinvarianten Derivationen</u> von $\mathcal{D}_G$,

$$\begin{aligned}L(G) &:= \{D \in \mathcal{D}_G \mid \lambda(x)\circ D = D\circ\lambda(x) \text{ für } x \in G\} \\ &= \{D \in \mathcal{D}_G \mid \lambda(x)D = D \text{ für } x \in G\},\end{aligned}$$

<u>Lie-Algbra</u> der linearen algebraischen Gruppe G.
Bemerkungen
(i) Für $D', D'' \in L(G)$ und $x \in G$ gilt

$$\lambda(x)\circ[D', D''] = [D',D'']\circ\lambda(x),$$

d.h.

$$L(G) \subseteq \mathcal{D}_G = \mathrm{Der}_k(k[G], k[G])$$

ist eine Lie-Teilalgebra der Lie-Algebra $\mathcal{D}_G$.

(ii) Ist die Charakteristik p des Grundkörpers k positiv, so gilt

$$D^p \in L(G)$$

für jedes $D \in L(G)$. Die p-Abbildung auf $\mathcal{D}_G$ läßt sich einschränken zu einer p-Abbildung von L(G). Damit bekommt L(G) die Struktur einer p-Lie-Algebra.

(iii) Die Lie-Teilalgebra $L(G) \subseteq \mathcal{D}_G$ ist stabil unter Rechtstranslationen,

$$\rho(x)L(G) \subseteq L(G) \text{ für jedes } x \in G.$$

(iv) Seien $D \in \mathcal{D}_G = \mathrm{Der}_k(k[G], k[G])$ und $x \in G$ ein Punkt. Die Zusammensetzung der k-Derivation

$$D: k[G] \longrightarrow k[G]$$

mit dem k-Algebra-Homomorphismus

$$k[G] \longrightarrow k,\ f \mapsto f(x),$$

ist eine k-Derivation, welche wir mit D_x bezeichnen,

$$D_x: k[G] \longrightarrow k,\ f \mapsto D_x(f) := (Df)(x).$$

Dann sind die folgende Bedingungen äquivalent.

(a) $D \in L(G)$, d.h. ist linksinvariant, d.h. $\lambda(x)D = D$ für jedes $x \in G$.

(b) $(dL_g)_x(D_x) = D_{gx}$ für beliebige $x, g \in G$.

(c) $D_g = (dL_g)_e(D_e)$ für beliebige $g \in G$.

(v) Seien

$$TG := \bigvee_{x\in G} T_xG$$

die disjunkte Vereinigung der Tangentialräume von G (das "<u>Tangentialbündel</u>") und

$$\pi: TG \longrightarrow G$$

die Abbildung, welche die Punkte von T_xG abbildet in x, also jeden Tangentialvektor auf dessen "<u>Angriffspunkt</u>". Dann definiert jedes

$$D \in \mathrm{Der}_k(k[G], k[G])$$

den Bezeichnungen von (iv) eine Abbildung

$$D: G \longrightarrow TG,\ g \mapsto D_g,$$

welche wir ebenfalls mit D bezeichnen und für welche

$$\pi \circ D = \mathrm{id}_G$$

gilt, d.h. diese Abbildung ist ein Schnitt von π. Sie ordnet jedes Punkt von G einen Tangentialvektor in diesem Punkt zu, d.h. diese Abbildung ist ein <u>Vektorfeld</u> auf G. Die Linkstranslation mit einem Element $g \in G$,

$$L_g: G \longrightarrow G,\ x \mapsto gx,$$

definiert eine Abbildung

$$dL_g: TG \longrightarrow TG,\ X \mapsto (dL_g)_{\pi(X)}(X),$$

welche jedes Vektor $X \in T_xG$ abbildet auf das Bild von X beim Differential

$$(dL_g)_x: T_xG \longrightarrow T_{gx}G$$

im Punkt x. Bedingung (b) von (iv) bedeutet dann gerade, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{dL_g} & TG \\ D\uparrow & & \uparrow D \\ G & \xrightarrow{L_g} & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D_x(\in T_xG) & \mapsto & (dL_g)_x(D_x)\in(T_{gx}G) \\ & & \| \\ \uparrow & & D_{g\,x} \\ & & \uparrow \\ x & \mapsto & g\,x \end{array}$$

kommutativ ist.

Beweis. Zu (i). Für D', D'' $\in$ L(G) und x $\in$ G gilt

$$\begin{aligned} \lambda(x)\circ D'\circ D'' &= D'\circ\lambda(x)\circ D'' && \text{(wegen } D'\in L(G)) \\ &= D'\circ D''\circ\lambda(x) && \text{(wegen } D''\in L(G)) \end{aligned}$$

d.h.

$$\lambda(x)\circ D'\circ D'' = D'\circ D''\circ\lambda(x) \text{ und } \lambda(x)\circ D''\circ D' = D''\circ D'\circ\lambda(x) \qquad (1)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda(x)\circ[D',D''] &= \lambda(x)\circ D'\circ D'' - \lambda(x)\circ D'\circ D'' && \text{(nach Definition von [,] in 4.4.3D)} \\ &= D'\circ D''\circ\lambda(x) - D'\circ D''\circ\lambda(x) \\ &= [D',D'']\circ\lambda(x) \end{aligned}$$

Zu (ii). Für jedes D$\in$L(G) und jedes x $\in$ G gilt

$$\lambda(x)\circ D^p = D^p\circ\lambda(x).$$

also $D^p \in L(G)$.

Zu (iii). Weil jede Linkstranslation[19]

$$L_g: G \longrightarrow G,\ x \mapsto g\cdot x,$$

(g$\in$G) mit jeder Rechtstranslation[20]

$$R_h: G \longrightarrow G,\ x \mapsto x\cdot h^{-1},$$

(h $\in$ G) kommutiert (wegen des Assoziativitätsgesetzes der Multiplikation in G), kommutieren auch die auf dem Koordinatenring k[G] induzierten Operationen, d.h.

$$\lambda(g)\circ\rho(h) = \rho(h)\circ\lambda(g) \text{ für } g,h \in G.$$

Für D $\in$ L(G) und x, y $\in$ G folgt

$$\begin{aligned} \lambda(x)(\rho(y)\cdot D) &= \lambda(x)(\rho(y)\circ D\circ\rho(y)^{-1}) && \text{(nach Definition der Operation von } \rho(y) \text{ auf } \mathcal{D}) \\ &= \lambda(x)\circ(\rho(y)\circ D\circ\rho(y)^{-1})\circ\lambda(x)^{-1} && \text{(nach Definition der Operation von } \lambda(x) \text{ auf } \mathcal{D}) \\ &= \lambda(x)\circ\rho(y)\circ D\circ\rho(y^{-1})\circ\lambda(x^{-1}) && (\lambda \text{ und } \rho \text{ sind Gruppen-Homomorphismen}) \\ &= \rho(y)\circ\lambda(x)\circ D\circ\lambda(x^{-1})\circ\rho(y^{-1}) && (\lambda(g) \text{ und } \rho(h) \text{ kommutieren}) \\ &= \rho(y)\circ(\lambda(x)\circ D)\circ\rho(y^{-1}) && \text{(nach Definition der Operation von } \lambda(x) \text{ auf } \mathcal{D}) \\ &= \rho(y)\circ D\circ\rho(y^{-1}) && \text{(wegen } D \in L(G)) \\ &= \rho(y)\cdot D && \text{(nach Definition der Operation von } \rho(y) \text{ auf } \mathcal{D}) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\rho(y)\cdot D \in L(G) \text{ für jedes } y \in G,$$

d.h. L(G) ist stabil unter Rechtstranslationen.

---

[19] vgl. 2.2.0.

[20] vgl. 2.2.0.

<u>Zu (iv)</u>. <u>Beweis von</u> (a) $\Leftrightarrow$ (b).

Nach Definitoin der Operation von $\lambda(g)$ auf $\mathrm{Der}_k(k[G], k[G])$ ist

$$\lambda(g)D = \lambda(g)\circ D\circ\lambda(g)^{-1}: k[G] \xrightarrow{\lambda(g)^{-1}} k[G] \xrightarrow{D} k[G] \xrightarrow{\lambda(g)} k[G]$$

für $g \in G$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\lambda(g)D = D \quad &\Leftrightarrow \lambda(g)\circ D\circ\lambda(g)^{-1} &&= D \\
&\Leftrightarrow D\circ\lambda(g)^{-1} &&= \lambda(g)^{-1}\circ D \\
&\Leftrightarrow (D\circ\lambda(g)^{-1})(f) &&= (\lambda(g)^{-1}\circ D)(f) \text{ für jedes } f \in k[G]
\end{aligned}$$

Wegen

$$\lambda(g)^{-1}(f)(x) = \lambda(g^{-1})(f)(x) = f(gx) = (L_g^* f)(x)$$

(nach 2.3.6 I) folgt

$$\begin{aligned}
\lambda(g)D = D &\Leftrightarrow (D\circ L_g^*)(f) = (\lambda(g)^{-1}\circ D)(f) \text{ für jedes } f \in k[G] \\
&\Leftrightarrow (D(L_g^*(f))(x) = (\lambda(g)^{-1}(D(f))(x) \text{ für } f \in k[G] \text{ und } x \in G \\
&\Leftrightarrow D_x(L_g^*(f)) = D(f)(gx) \text{ für } f \in k[G] \text{ und } x \in G \\
&\Leftrightarrow (D_x\circ L_g^*)(f) = D_{gx}(f) \text{ für } f \in k[G] \text{ und } x \in G \\
&\Leftrightarrow D_x\circ L_g^* = D_{gx} \text{ für } x \in G \\
&\Leftrightarrow (dL_g)_x(D_x) = D_{gx} \text{ für } x \in G \qquad \text{(vgl. 4.1.3)}
\end{aligned}$$

<u>Beweis von</u> (b) $\Rightarrow$ (c).

Die Identität von (b) besteht speziell für $x = e$.

<u>Beweis von</u> (c) $\Rightarrow$ (b).

Mit (c) gilt für beliebige $g, x \in G$:

$$\begin{aligned}
D_{gx} &= (dL_{gx})_e(D_e) && \text{(wegen (c)} \\
&= (d(L_g\circ L_x))_e(D_e) \\
&= (dL_g)_x\circ(dL_x)_e)(D_e) && \text{(nach Bemerkung 4.1.3(ii))} \\
&= (dL_g)_x((dL_x)_e(D_e)) \\
&= (dL_g)_x(D_x) && \text{(wegen (c))}
\end{aligned}$$

<u>Zu (v)</u>. Es gibt nichts zu beweisen.

QED.

4.4.3J Ergänzung: abgeleitete Reihe und Auflösbarkeit

Sei **g** eine Lie-Algebra über dem Körper F. Wir definieren induktiv

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^0\mathbf{g} &:= \mathbf{g} \\
\mathcal{D}^{i+1}\mathbf{g} &:= [\mathcal{D}^i\mathbf{g}, \mathcal{D}^i\mathbf{g}]
\end{aligned}$$

Die absteigende Kette von Idealen

$$\mathcal{D}^0\mathbf{g} \supseteq \mathcal{D}^1\mathbf{g} \supseteq \dots$$

heißt <u>abgeleitete Reihe</u> der Lie-Algebra **g**. Die Lie-Algebra heißt <u>auflösbar</u>, wenn es eine natürliche Zahl n gibt mit

$$\mathcal{D}^n\mathbf{g} = 0.$$

4.4.4 Trivialisierung des Tangentialbündels 71

Seien G eine lineare algebraische Gruppe und

$$\mathcal{D}_G := \mathrm{Der}_k(k[G]) = \mathrm{Der}_k(k[G], k[G])$$

(vgl. 4.4.3 F). Dann gibt es einen Isomorphismus von k[G]-Moduln

$$\Psi: \mathcal{D}_G \xrightarrow{\cong} k[G]\otimes_k T_e G,$$

wobei die Modulstruktur rechts vom ersten Faktor kommt, mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Für jedes $x \in G$ gilt

$$\Psi\circ\lambda(x)\circ\Psi^{-1} = \lambda(x)\otimes\mathrm{Id} \text{ und } \Psi\circ\rho(x)\circ\Psi^{-1} = \rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x).$$

(siehe 4.4.3 I zur Definition von λ, ρ und 4.4.1B zur Definition von Ad).

(ii) Für $f \in k[G]$, $X\in T_eG$ und $\Delta f = \sum_i f_i\otimes g_i \in k[G]\otimes_k k[G]$ gilt

$$\Psi^{-1}(1\otimes X)(f) = - \sum_i f_i\cdot X(g_i).$$

Dabei sei

$$\Delta: k[G] \longrightarrow k[G]\otimes_k k[G]$$

die Komultiplikation von G.

(iii) Ist $F \subseteq k$ ein Teilkörper und G eine F-Gruppe, so sind der Isomorphismus

$$\Psi: \mathcal{D}_G \xrightarrow{\cong} k[G]\otimes_k T_e G,$$

und dessen Umkehrung über F-definiert bezüglich der F-Strukturen

$$\mathcal{D}_G(F) := \mathrm{Der}_F(F[G]) = \mathrm{Der}_F(F[G], F[G])$$

und

$$(k[G]\otimes_k T_e G)(F) := F[G]\otimes_F (T_e G)(F).$$

Dies sind tatsächlich F-Strukturen von $\mathcal{D}_G$ bzw. $k[G]\otimes_k T_e G$. Dabei identifizieren wir die Lie-Algebra $\mathcal{D}_G(F)$ mit deren Bild bei der Abbildung

$$\mathcal{D}_G(F) \longrightarrow k\otimes_F \mathcal{D}_G(F) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_k(k\otimes_F F[G], k\otimes_F F[G]) = \mathcal{D}_G,$$

$$D \mapsto 1\otimes D, \quad c\otimes D \mapsto c\cdot(\mathrm{id}_k\otimes D).$$

(siehe zweiten Schritts des Beweises).

Beweis. Zu (i). 1. Schritt. Konstruktion von Ψ mit $\Psi\circ\lambda(x)\circ\Psi^{-1} = \lambda(x)\otimes\mathrm{Id}$,

Wir wenden den Funktor $\mathrm{Hom}_{k[G]}(?, k[G])$ auf die Umkehrung des Isomorphismus Φ von 4.4.2 an und erhalten so den k[G]-linearen Isomorphismus

$$\varphi: \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G]) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k (T_e G)^*, k[G]), \ell \mapsto \ell\circ\Phi^{-1}.$$

Wir versehen die beiden Hom-Moduln wie folgt mit einer Operation durch Linkstranslationen.

$$\mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G]) \xrightarrow{\lambda(x)} \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G])$$

$$\ell \mapsto \lambda(x)\circ\alpha\circ\lambda(x)^{-1}$$

und

$$\mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*, k[G]) \xrightarrow{\lambda(x)\otimes \mathrm{Id}} \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*, k[G])$$
$$\ell \mapsto \lambda(x)\circ\alpha\circ(\lambda(x)^{-1}\otimes \mathrm{Id})$$

Nach 4.4.2 (i) ist

$$\Phi\circ\lambda(x)\circ\Phi^{-1} = \lambda(x)\otimes \mathrm{Id},$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[G]\otimes_k(T_eG)^* & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & \Omega_G \\ \lambda(x)\otimes \mathrm{Id}\downarrow & & \downarrow\lambda(x) \\ k[G]\otimes_k(T_eG)^* & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & \Omega_G \end{array}$$

ist kommutativ. Für $x \in G$ und $\ell\in \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G])$ folgt

$$\begin{array}{lll} \varphi(\lambda(x)\ell) & = \varphi(\lambda(x)\circ\ell\circ\lambda(x)^{-1}) & \text{(Definiton von } \lambda(x) \text{ auf Def}(\varphi)^{21}) \\ & = \lambda(x)\circ\ell\circ\lambda(x^{-1})\circ\Phi^{-1} & \text{(Definiton von } \varphi) \\ & = \lambda(x)\circ\ell\circ\Phi^{-1}\circ(\lambda(x^{-1})\otimes \mathrm{Id}) & \text{(Kommutativität des Diagramms)} \\ & = \lambda(x)\circ\varphi(\ell)\circ(\lambda(x)^{-1}\otimes \mathrm{Id}) & \text{(Definiton von } \varphi) \\ & = (\lambda(x)\otimes \mathrm{Id})\varphi)(\ell) & \text{(Definiton von } \lambda(x) \text{ auf Im}(\varphi)) \end{array}$$

Damit ist die Kommutativität des folgenden Diagramms gezeigt:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*;k[G]) & \xleftarrow[\cong]{\varphi} & \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G,k[G]) \\ \lambda(x)\otimes \mathrm{Id}\uparrow & & \uparrow\lambda(x) \\ \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*;k[G]) & \xleftarrow[\cong]{\varphi} & \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G,k[G]) \end{array} \qquad (1)$$

Auf Grund der Universalitätseigenschaft des Differentialmoduls ist der Hom-Modul auf der rechen Seite über k[G] isomorph zu $\mathcal{D}_G$,

$$\psi\colon \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G]) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_k(k[G], k[G]),\ \ell \mapsto \ell\circ d_G,$$

(vgl. Bemerkung 4.2.2 A(i)). Für $f\in k[G]$, $x \in G$ und $\ell\in \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G])$ gilt

$$\begin{array}{lll} \psi(\lambda(x)\ell) & = \psi(\lambda(x)\circ\ell\circ\lambda(x)^{-1}) & \\ & = \lambda(x)\circ\ell\circ\lambda(x)^{-1}\circ d_G & \text{(Definition von } \psi) \\ & = \lambda(x)\circ\ell\circ d_G\circ \lambda(x)^{-1} & \text{(Bemerkung 4.4.1A (iv))} \\ & = \lambda(x)(\ell\circ d_G) & \text{(nach 4.4.3 I)} \\ & = \lambda(x)\psi(\ell) & \end{array}$$

Mit anderen Worten, das Diagramm folgende Diagramm ist kommuttiv.

---

[21] Def(φ) sei der Definitonsbereich von φ.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega,k[G]) & \xrightarrow[\cong]{\psi} & \mathcal{D}_G \\
\lambda(x)\downarrow & & \downarrow\lambda(x) \\
\mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega,k[G]) & \xrightarrow[\cong]{\psi} & \mathcal{D}_G
\end{array} \qquad (2)$$

Weiter besteht ein natürlicher k[G]-linearer Isomorphismus

$$\zeta\colon k[G]\otimes_k T_eG \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*, k[G]),\ f\otimes X \mapsto (g\otimes\ell \mapsto f\bullet g\bullet\ell(X)).$$

Das sieht man wie folgt. Die über k bilineare Abbildung

$$T_eG \times (T_eG)^* \longrightarrow k,\ (X, \ell) \mapsto \ell(X),$$

besitzt (bezüglich beliebiger k-Vektorraumbasen der beteiligten Räume) eine Matrix mit von Null verschiedener Determinante. Sie induziert deshalt einen k-linearen Isomorphismus

$$T_eG \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_k((T_eG)^*, k),\ X \mapsto (\ell \mapsto \ell(X)),$$

mit derselben Matrix bezüglich geeignet gewählter Basen. Wir wenden den Funktor $k[G]\otimes_k$ an und erhalten einen Isomorphismus von k[G]-Moduln

$$k[G]\otimes_k T_eG \xrightarrow{\cong} k[G]\otimes_k \mathrm{Hom}_k((T_eG)^*, k),\ f\otimes X \mapsto f\otimes(\ell \mapsto \ell(X)). \qquad (3)$$

Für jeden k-Vektorraum V ist die k[G]-lineare Abbildung

$$k[G]\otimes_k \mathrm{Hom}_k(V, k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V, k[G]),\ f\otimes\ell \mapsto (v \mapsto f\bullet\ell(v)), \qquad (4)$$

bijektiv. Um das einzusehen fixieren wir eine Basis $\{e_i\}$ von V und die dazu duale Basis $\{x_i\}$. Jedes $\alpha\in \mathrm{Hom}_k(V, k[G])$ ist durch seine Werte $\alpha(v_i) = f_i\in k[G]$ in den Elementen der Basis der v_i festgelegt. Das Bild von $\sum_j f_j\otimes x_j$ bei (2) hat in v_i den Wert

$$\sum_j f_jx_j(v_i) = f_i,$$

ist somit gleich α. Die Abbildung ist surjektiv. Jedes Element des Definitionsbereichs hat die Gestalt

$$\sum_j f_j\otimes x_j$$

mit eindeutig bestimmten $f_j \in k[G]$. Ist das Bild bei (2) die Null-Abbildung, so sind alle f_j gleich 0. Dann ist aber auch $\sum_j f_j\otimes x_j$ gleich Null. Die Abbildung (2) ist injektiv. Wir setzen $V = (T_eG)^*$, setzen (3) und (4) zusammen und erhalten die k[G]-lineare Bijektion

$$k[G]\otimes_k T_eG \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_k((T_eG)^*, k[G]),\ f\otimes X \mapsto (\ell \mapsto f\bullet\ell(X))$$

Auf Grund der Universalitätseigenschaft des Tensorprodukt kann man den Hom-Modul rechts mit $\mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*, k[G])$ identifizieren. Die Abbildung ist dann gerade die Abbildung ζ, d.h. ζ ist ein Isomorphismus.

$$\zeta\colon k[G]\otimes_k T_eG \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k (T_eG)^*, k[G]),\ f\otimes X \mapsto (g\otimes\ell \mapsto f\bullet g\bullet\ell(X)).$$

Für f,g $\in$ k[G], X $\in T_eG$ und $\ell\in(T_eG)^*$ gilt

$(((\lambda(x)\otimes\mathrm{Id})\circ\zeta)(f\otimes X))(g\otimes\ell) = (\lambda(x)\otimes\mathrm{Id})(\zeta(f\otimes X))(g\otimes\ell)$

$= (\lambda(x)\circ\zeta(f\otimes X)\circ(\lambda(x)^{-1}\otimes\mathrm{Id}))(g\otimes\ell)$ (Definiton von $\lambda(x)\otimes\mathrm{Id}$ auf $\mathrm{Im}(\zeta)$)

$= ((\lambda(x)\circ\zeta(f\otimes X))(\lambda(x)^{-1}g)\otimes\ell)$

$= (\lambda(x)(f\bullet(\lambda(x)^{-1}g)\bullet\ell(X))$ (Definition von ζ)

$= (\lambda(x)f)\bullet g\bullet\ell(X)$ ($\lambda(x)$ ist k-Algebra-Homomorphismus)

$= \zeta((\lambda(x)f)\otimes X)(g\otimes\ell)$ (Definiton von ζ)

$= ((\zeta\circ(\lambda(x)\otimes\mathrm{Id}))(f\otimes X))(g\otimes\ell)$

also

$(\lambda(x)\otimes\mathrm{Id})\circ\zeta = \zeta\circ(\lambda(x)\otimes\mathrm{Id}$.

Wir haben gezeigt, das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} k[G]\otimes_k T_eG & \xrightarrow[\cong]{\zeta} & \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*,k[G]) \\ \lambda(x)\otimes\mathrm{Id}\downarrow & & \downarrow\lambda(x)\otimes\mathrm{Id} \\ k[G]\otimes_k T_eG & \xrightarrow[\cong]{\zeta} & \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*,k[G]) \end{array} \tag{5}$$

Wir setzen

$$\Psi := \zeta^{-1}\circ\varphi\circ\psi^{-1}\colon \mathcal{D}_G \xrightarrow{\cong} k[G]\otimes_k T_eG.$$

Die Behauptung von (i) im Fall der Linkstranslatonen erhält man durch Zusammensetzen der Diagramme (1), (2) und (5).

2. <u>Schritt</u>. Beweis von $\Psi\circ\rho(x)\circ\Psi^{-1} = \lambda(x)\otimes\mathrm{Ad}\ x$.

Wir betrachten die zu den Diagrammen (1), (2) und (5) analogen Diagramme vom $\rho(x)$ anstelle von $\lambda(x)$ und setzen diese Zusammen.

Wir versehen die Definitionsbereich und Wertevorrat des k[G]-linearen Isomorphismus φ des ersten Schritt wie folgt mit Operationen.

$$\mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G]) \xrightarrow{\rho(x)} \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G])$$
$$\ell \mapsto \rho(x)\circ\alpha\circ\rho(x)^{-1}$$

und

$$\mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*, k[G]) \xrightarrow{\lambda(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)^*} \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*, k[G])$$
$$\ell \mapsto \lambda(x)\circ\alpha\circ(\lambda(x)^{-1}\otimes(\mathrm{Ad}\ x^{-1})^*)$$

Nach 4.4.2 (i) ist

$$\Phi\circ\rho(x)\circ\Phi^{-1} = \rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)^*.,$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[G]\otimes_k(T_eG)^* & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & \Omega_G \\ \rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)^*\downarrow & & \downarrow\rho(x) \\ k[G]\otimes_k(T_eG)^* & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & \Omega_G \end{array}$$

ist kommutativ. Für $x \in G$ und $\ell \in \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G])$ folgt

$$\begin{aligned} \varphi(\rho(x)\ell) &= \varphi(\rho(x)\circ\ell\circ\rho(x)^{-1}) && \text{(Definiton von } \rho(x) \text{ auf Def}(\varphi)^{22}) \\ &= \rho(x)\circ\ell\circ\rho(x^{-1})\circ\Phi^{-1} && \text{(Definiton von } \varphi) \\ &= \rho(x)\circ\ell\circ\Phi^{-1}\circ(\rho(x^{-1})\otimes(\mathrm{Ad}\ x)^*) && \text{(Kommutativität des Diagramms)} \\ &= \rho(x)\circ\varphi(\ell)\circ(\rho(x)^{-1}\otimes(\mathrm{Ad}\ x^*)) && \text{(Definiton von } \varphi) \\ &= (\rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)^*)\varphi)(\ell) && \text{(Definiton von } \rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x) \text{ auf Im}(\varphi)) \end{aligned}$$

Damit ist die Kommutativität des folgenden Diagramms gezeigt:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*;k[G]) & \xleftarrow[\cong]{\varphi} & \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G,k[G]) \\ \rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)^*\uparrow & & \uparrow\rho(x) \\ \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*;k[G]) & \xleftarrow[\cong]{\varphi} & \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G,k[G]) \end{array} \qquad (1')$$

Als nächstes untersuchen wir, wie sich der k[G]-lineare Isomorphismus

$$\psi: \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G]) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_k(k[G], k[G]),\ \ell \mapsto \ell\circ d_G,$$

des ersten Schritts in Bezug auf rechte vertikale Spalte von (1') verhält. Für $f \in k[G]$, $x \in G$ und $\ell \in \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G])$ gilt

$$\begin{aligned} \psi(\rho(x)\ell) &= \psi(\rho(x)\circ\ell\circ\rho(x)^{-1}) && \text{(Definiton von } \rho(x) \text{ auf Def}(\psi)) \\ &= \rho(x)\circ\ell\circ\rho(x)^{-1}\circ d_G && \text{(Definition von } \psi) \\ &= \rho(x)\circ\ell\circ d_G\circ\rho(x)^{-1} && \text{(Bemerkung 4.4.1A (iv))} \\ &= \rho(x)(\ell\circ d_G) && \text{(nach 4.4.3 I)} \\ &= \rho(x)\psi(\ell) \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, das Diagramm folgende Diagramm ist kommuttiv.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega,k[G]) & \xrightarrow[\cong]{\psi} & \mathcal{D}_G \\ \rho(x)\downarrow & & \downarrow\rho(x) \\ \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega,k[G]) & \xrightarrow[\cong]{\psi} & \mathcal{D}_G \end{array} \qquad (2')$$

Schließlich untersuchen wir, wie sich der k[G]-lineare Isomorphismus

$$\zeta: k[G]\otimes_k T_eG \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*, k[G]),\ f\otimes X \mapsto (g\otimes\ell \mapsto f\cdot g\cdot\ell(X)).$$

des ersten Schritts in Bezug auf linke vertikale Spalte von (1') verhält. Für $f,g \in k[G]$, $X \in T_eG$ und $\ell \in (T_eG)^*$ gilt

[22] Def(φ) sei der Definitonsbereich von φ.

$$
\begin{aligned}
(((\rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)^*)\circ\zeta)(f\otimes X))(g\otimes\ell) &= (\rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)^*)(\zeta(f\otimes X))(g\otimes\ell)\\
&= (\rho(x)\circ\zeta(f\otimes X)\circ(\rho(x)^{-1}\otimes(\mathrm{Ad}\ x^{-1})^*))(g\otimes\ell) && \text{(Definiton von } \rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)^*\text{)}\\
&= ((\rho(x)\circ\zeta(f\otimes X))(\rho(x)^{-1}g)\otimes((\mathrm{Ad}\ x^{-1})^*(\ell))\\
&= ((\rho(x)\circ\zeta(f\otimes X))(\ \rho(x)^{-1}g)\otimes(\ell\circ(\mathrm{Ad}\ x)\ ) && \text{(Bemerkung 4.4.1B (i))}\\
&= (\rho(x)(\ \ f\bullet(\rho(x)^{-1}g)\bullet(\ell\circ(\mathrm{Ad}\ x)(X)\ \ ) && \text{(Definition von } \zeta\text{)}\\
&= (\rho(x)(\ \ f\bullet(\rho(x)^{-1}g)\bullet\ell((\mathrm{Ad}\ x)X)\ \ )\\
&= (\rho(x)f)\bullet g\bullet\ell((\mathrm{Ad}\ x)X) && (\rho(x) \text{ ist k-Algebra-Homomorphismus})\\
&= \zeta((\rho(x)f)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)X)(g\otimes\ell) && \text{(Definition von } \zeta\text{)}\\
&= \zeta((\rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x))(f\otimes X))(g\otimes\ell)\\
&= ((\zeta\circ(\rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)))(f\otimes X))(g\otimes\ell)
\end{aligned}
$$

also

$(\rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)^*)\circ\zeta = \zeta\circ(\rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)$.

Wir haben gezeigt, das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$
\begin{array}{ccc}
k[G]\otimes_k T_eG & \xrightarrow[\cong]{\zeta} & \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*,k[G]) \\
\rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)\downarrow & & \downarrow\rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\ x)^* \\
k[G]\otimes_k T_eG & \xrightarrow[\cong]{\zeta} & \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G]\otimes_k(T_eG)^*,k[G])
\end{array}
\qquad (5')
$$

Durch Zusammensetzen der Diagramme (1'), (2') und (5') erhalten wir die Aussage von (i) bezüglich der Operation von $\rho(x)$.

Zu (ii). Wir verwenden die im Beweis von (i) eingeführten Bezeichnungen. Seien

$$X\in T_eG,\ f\in k[X] \text{ und } \Delta f = \sum_i f_i\otimes g_i \in k[G]\otimes_k k[G].$$

Nach Definiton von Ψ gilt

$$
\begin{aligned}
\Psi^{-1}(1\otimes X)(f) &= (\zeta^{-1}\circ\varphi\circ\psi^{-1})^{-1}(1\otimes X)(f)\\
&= (\psi\circ\varphi^{-1}\circ\zeta)\ (1\otimes X)(f)
\end{aligned}
$$

Nach Definition von ζ ist $\zeta(1\otimes X)$ die Abbildung

$$k[G]\otimes_k(T_eG)^* \longrightarrow k[G],\ g\otimes\ell \mapsto g\bullet\ell(X)$$

Nach Definition von φ ist das Bild $\varphi^{-1}(\zeta(1\otimes X))$ dieser Abbildung bei φ^{-1} die k[G]-lineare Abbildung

$$(\varphi^{-1}\circ\zeta)(1\otimes X) = \varphi^{-1}(\zeta(1\otimes X)):\ \Omega_G \longrightarrow k[G],\ \omega \mapsto (\zeta(1\otimes X)\circ\phi)(\omega).$$

Nach Definition von ψ ist das Bild dieser Abbildung bei ψ die k-Derivation

$$\Psi^{-1}(1\otimes X) = (\psi\circ\varphi^{-1}\circ\zeta)\ (1\otimes X):\ k[G] \longrightarrow k[G],\ \alpha \mapsto \zeta(1\otimes X)(\phi(d\alpha)).$$

Speziell für $\alpha = f$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\Psi^{-1}(1\otimes X)(f) &= \zeta(1\otimes X)(\phi(df))\\
&= \zeta(1\otimes X)(\ -\sum_i f_i\otimes\delta g_i) && \text{(nach 4.2.2 (ii))}\\
&= -\sum_i \zeta(1\otimes X)(f_i\bullet\ \delta g_i(X)) && \text{(denn } \zeta(1\otimes X) \text{ ist k[G]-linear)}
\end{aligned}
$$

$$= - \sum_i f_i \bullet \delta g_i(X) \qquad \text{(nach Definiton von } \zeta)$$

$$= - \sum_i f_i \bullet X(g_i) \qquad \text{(nach Bemerkung 4.4.1B (iii))}$$

Zu (iii). 1. Schritt. $F[G]\otimes_F(T_eG)(F)$ eine F-Strukktur von $k[G]\otimes_k T_eG$.
Weil $F[G]$ und $(T_eG)(F)$ F-Strukturen von $k[G]$ bzw. T_eG sind, ist dies ein Spezialfall von Bemerkung 1.3.7 B(vii).

2. Schritt. $\mathcal{D}_G(F) := Der_F(F[G],F[G])$ ist eine F-Struktur von $\mathcal{D}_G = Der_k(k[G], k[G])$.
Genauer, es gibt Isomorphismen

$$k\otimes_F\mathcal{D}_G(F) \cong Der_k(k\otimes_F F[G], k\otimes_F F[G]) \cong Der_k(k[G], k[G]) = \mathcal{D}_G.$$

$$c\otimes D \mapsto (d\otimes f \mapsto (cd)\otimes D(f)) \mapsto (f = \sum_i c_i f_i \text{ mit } f_i\in F[X] \mapsto \sum_i cdc_i D(f_i)$$

(vgl. auch Bemerkung 4.1.8 (i)).
Der zweite Isomorphismus besteht, weil $F[G]$ eine F-Struktur von $k[G]$, d.h. weil die natürliche Einbettung

$$F[G] \hookrightarrow k[G]$$

einen k-Algebra-Isomorphismus

$$k\otimes F[G] \xrightarrow{\cong} k[G],\ c\otimes f \mapsto c\bullet f,$$

induziert. Wenden wir uns dem ersten Isomorphismus zu. Jede F-Derivation

$$D: F[G] \longrightarrow F[G]$$

ist insbesondere F-linear, induziert also eine k-lineare Abbildung

$$1\otimes_F D: k\otimes_F F[G] \longrightarrow k\otimes_F F[G],\ c\otimes f \mapsto c\otimes D(f).$$

Dies ist wieder eine Derivation: für $f,g \in F[X]$ und $c,d \in k$ gilt

$$\begin{aligned}(1\otimes_F D)((c\otimes f)\bullet(d\otimes g)) &= (1\otimes_F D)((cd)\otimes(fg))\\ &= (cd)\otimes D(fg)\\ &= (cd)\otimes(f\bullet Dg + g\bullet Df)\\ &= (c\otimes f)\bullet(d\otimes Dg) + (d\otimes g)(x)\bullet(c\otimes Df)\\ &= (c\otimes f)\bullet(1\otimes_F D)(d\otimes g) + (d\otimes g)\bullet(1\otimes_F D)(c\otimes f).\end{aligned}$$

Wir erhalten auf diese Weise eine Abbildung

$$k \times \mathcal{D}_G(F) \longrightarrow Der_k(k\otimes_F F[G], k\otimes_F F[G]),\ (c, D) \mapsto c\bullet(1\otimes_F D).$$

Weil $1\otimes_F D$ linear ist über k, ist diese Abbildung bilinear über F, induziert also eine k-linearen Abbildung

$$\varphi{:}k \otimes_F\mathcal{D}_G(F) \longrightarrow Der_k(k\otimes_F F[G], k\otimes_F F[G]),\ c\otimes D \mapsto c\bullet(1\otimes_F D).$$

Sei $\{\omega_i\}_{i\in I}$ eine F-Vektorraum-Basis von k.

Die Abbildung φ ist injektiv: Sei $D \in Ker(\varphi)$. Wir haben zu zeigen, D ist gleich 0. Dazu schreiben wir D in der Gestalt

$$D = \sum_{i\in I} \omega_i\otimes_F D_i \text{ mit } D_i \in \mathcal{D}_G(F) = Der_F(F[G], F[G]).$$

Weil D im Kern von φ liegt, gilt für beliebige $c \in k$ und $f \in F[G]$

$$
\begin{aligned}
0 &= \varphi(\sum_{i\in I} \omega_i \otimes_F D_i)(c\otimes f) \\
&= \sum_{i\in I} \varphi(\omega_i \otimes_F D_i)(c\otimes f) && (\varphi \text{ ist k-linear}) \\
&= \sum_{i\in I} \omega_i \bullet ((1\otimes_F D_i)(c\otimes f)) && (\text{Definition von } \varphi) \\
&= \sum_{i\in I} \sum_{i\in I} \omega_i \bullet (c\otimes_F D_i(f)) && (\text{Definition von } 1\otimes_F D_i) \\
&= \sum_{i\in I} (\omega_i \bullet c)\otimes_F D_i(f)
\end{aligned}
$$

Speziell für c = 1 erhalten wir

$$
0 = \sum_{i\in I} \omega_i \otimes_F D_i(f) \qquad \text{für jedes } f \in F[G].
$$

Die Wahl der Basis der ω_i definiert eine Zerlegung von k in eine direkte Summe von Examplaren von F. Weil das Tensor-Produkt mit direkten Summen kommutiert, definiert diese Basis auch eine Zerlegung von $k\otimes_F F[G]$ in eine direkte Summe von Exemplaren von F[G]. Die gerade bewiesene Identität bedeutet, das jede Komponente des Elements $\sum_{i\in I} \omega_i \otimes_F D_i(f) \in k\otimes_F F[G]$ bezüglich dieser direkten Summen-Zerlegung gleich Null ist, d.h. es gilt $D_i(f) = 0$ für jedes $f \in F[X]$, d.h. es ist $D_i = 0$ für jedes i, also

$$
D = \sum_{i\in I} \omega_i \otimes_F D_i = 0.
$$

<u>Die Abbildung</u> φ <u>ist surjektiv</u>:

Für jedes $\tilde{D} \in Der_k(k\otimes_F F[G], k\otimes_F F[G])$ und jedes $f\in F[X]$ können wir schreiben

$$
\tilde{D}(1\otimes f) = \sum_{i\in I} \omega_i \otimes D_i(f)
$$

mit eindeutig bestimmten $D_i(f) \in F[X]$. Die Abbildungen

$$
D_i: F[X] \longrightarrow F[X]
$$

sind F-linear und für $f,g\in F[X]$ gilt

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}(1\otimes fg) &= \tilde{D}((1\otimes f)\bullet(1\otimes g)) \\
&= 1\otimes f\bullet \tilde{D}(1\otimes g) + 1\otimes g\bullet \tilde{D}(1\otimes f)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i\in I} \omega_i \otimes f \bullet D_i(g) + \sum_{i\in I} \omega_i \otimes g \bullet D_i(f)$$

$$= \sum_{i\in I} \omega_i \otimes (f \bullet D_i(g) + g \bullet D_i(f))$$

also $D_i(f \bullet g) = f(x) \bullet D_i(g) + g(x) \bullet D_i(f)$. Wir haben gezeigt $D_i \in \mathcal{D}_G(F)$. Nach Konstruktion gilt

$$\varphi(\sum_{i\in I} \omega_i \otimes D_i)(c \otimes f) = \sum_{i\in I} c \bullet \omega_i \otimes D_i(f) = c \bullet \tilde{D}(1 \otimes f) = \tilde{D}(c \otimes f),$$

also $\varphi(\sum_{i\in I} \omega_i \otimes D_i) = \tilde{D}$, d.h. φ ist auch surjektiv.

3. Schritt. Ψ und Ψ^{-1} sind über F definiert.

Weil die Abbildungen Φ und Φ^{-1} von 4.4.2 über F definiert sind, gilt dasselbe auch für die in Beweis von (i) eingeführte Abbildung

$$\varphi: \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G]) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G] \otimes_k (T_e G)^*, k[G]),\ \ell \mapsto \ell \circ \Phi^{-1}.$$

und deren Umkehrung. Weiter ist die Abbildung (3) im Beweis von (i),

$$\zeta: k[G] \otimes_k T_e G \xrightarrow{\cong} k[G] \otimes_k \mathrm{Hom}_k((T_e G)^*, k),\ f \otimes X \mapsto f \otimes (\ell \mapsto \ell(X)),$$

über F definiert (vgl. Bemerkung 4.4.2 (ii) und Bemerkung 4.1.8 (ii)): die Einschränkung auf die F-Struktur des Definitionsbereichs bekommt die Gestalt

$$F[G] \otimes_k \mathrm{Der}_F(F[G], F_e) \xrightarrow{\cong} F[G] \otimes_F \mathrm{Hom}_F((T_e G)^*, F),$$

$$f \otimes X \mapsto f \otimes (g \bmod M_e(F)^2 \mapsto X(g)),$$

wenn man $(T_e G)^*$ mit $M_e(F) / M_e(F)^2$ identifiziert.

Weil ζ ein Isomorphismus ist, ist das Bild der F-Struktur des Definitionsbereichs von ζ eine F-Struktur des Wertevorrats (vgl. Bemerkung 1.3.7 B(vi)) und damit gleich der gegebenen F-Struktur des Wertevorrats. Nach Bemerkung 1.3.7 B(v) ist ζ ein F-Isomorphismus, d.h. auch ζ^{-1} ist über F definiert. Damit sind die Abbildung

$$\zeta^{-1} \circ \varphi: \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G]) \xrightarrow{\cong} k[G] \otimes_k T_e G$$

und deren Umkehrung über F definiert. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, auch der natürliche Isomorphismus

$$\eta: \mathrm{Hom}_{k[G]}(\Omega_G, k[G]) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_k(k[G], k[G]),\ \ell \mapsto \ell \circ d_G,$$

ist ein F-Isomorphismus (denn $\Psi = \zeta^{-1} \circ \varphi \circ \eta^{-1}$). Dazu reicht es zu zeigen, daß

$$d_G: k[G] \longrightarrow \Omega_G$$

über F definiert ist, denn dann ist η über F definiert und als k-linearer Isomorphismus sogar eine F-Isomorphismus. Es reicht zu zeigen, daß das folgende Diagramm kommutativ ist

$$\begin{array}{ccc} k[G] & \xrightarrow{d_{k[G]/k}} & \Omega_{k[G]/k} \\ \cup & & \cup \\ F[G] & \xrightarrow{d_{F[G]/F}} & \Omega_{F[G]/F} \end{array}$$

(vgl. Bemerkung 4.4.2(ii)). Das ist aber der Fall, denn die rechte vertikale Abbildung ist gerade durch die Kommutativität dieses Diagramms definiert (vgl. 4.2.3).
QED.

4.4.5 Propositon: adjungierte Darstellung 71

Seien G eine lineare algebraische Gruppe,

$$\mathcal{D}_G = \mathrm{Der}_k(k[G], k[G])$$

die Lie-Algebra der k-Derivationen des Koordinatenrings von G und α' die k-lineare Abbildung

$$\alpha' := \alpha'_G: \mathcal{D}_G \longrightarrow T_e G = \mathrm{Der}_k(k[X], k_x), D \mapsto (f \mapsto (Df)(e)),$$

(vgl. 4.1.3). Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Die Einschränkung von

$$\alpha := \alpha_G := \alpha'_G|_{L(G)}$$

auf die Lie-Algebra $L(G) \subseteq \mathcal{D}_G$ von G (vgl. 4.4.3 I) ist ein k-linearer Isomorphismus,

$$\alpha: L(G) \xrightarrow{\cong} T_e G.$$

Für jedes $x \in G$ gilt

$$\alpha \circ \rho(x) \circ \alpha^{-1} = \mathrm{Ad}\ x.$$

(ii) Der Gruppen-Homomorphismus

$$\mathrm{Ad}: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(T_e)$$

(vgl. Bemerkung 4.4.1B(i)) ist eine rationale Darstellung von G und heißt <u>adjungierte Darstellgung</u> von G.

(iii) Das Bild von L(G) bei der Abbildung $\Psi: \mathcal{D}_G \xrightarrow{\cong} k[G]\otimes_k T_e G$ von 4.4.4 ist gleich

$$\Psi(L(G)) = k\otimes_k T_e G.$$

(iv) Für jedes $X \in T_e G$ gilt

$$\alpha(\Psi^{-1}(1\otimes X)) = -X,$$

d.h. die Abbildung

$$T_e G \longrightarrow L(G), X \mapsto -\Psi^{-1}(1\otimes X),$$

ist invers zum Isomorphismus α.

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen von 4.4.4 und fixieren eine k-Vektorraumbasis

$$X_1,\ldots,X_n \in T_e G$$

des Tangentialraums an G im neutralen Element.

1. <u>Schritt</u>. $\Psi(L(G)) = k\otimes_k T_e G$ (Beweis von (iii)).

Das Bild eines Elements $D \in \mathcal{D}_G$ beim k[G]-linearen Isomorphismus

$$\Psi: \mathcal{D}_G \xrightarrow{\cong} k[G]\otimes_k T_eG,$$

hat die Gestalt

$$\Psi(D) = \sum_i f_i \otimes X_i$$

mit eindeutig bestimmten $f_i \in k[G]$. Nach 4.4.4 (i) ist

$$\Psi(\lambda(x)\bullet D) = (\lambda(x)\otimes Id)(\Psi(D)) = \sum_i \lambda(x)f_i \otimes X_i$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
D \in L(G) \quad & \Leftrightarrow \lambda(x)\bullet D = D \text{ für jedes } x \in G \text{ (vgl. 4.4.3 I)} \\
& \Leftrightarrow \Psi(\lambda(x)\bullet D) = \Psi(D) \qquad (\Psi \text{ ist bijektiv}) \\
& \Leftrightarrow \sum_i \lambda(x)f_i \otimes X_i = \sum_i f_i \otimes X_i \\
& \Leftrightarrow^{23} \lambda(x)f_i = f_i \text{ für jedes } i \\
& \Leftrightarrow f_i \in k. \text{ für jedes } i \\
& \Leftrightarrow \Psi(D) \in k\otimes_k T_eG.
\end{aligned}$$

Weil Ψ bijektiv ist, folgt $\Psi(L(G)) = k\otimes_k T_eG$.

2. <u>Schritt</u>. Für $X \in T_eG$ und $f \in k[G]$ mit $\Delta f = \sum_i f_i \otimes g_i$ gilt

$$(\alpha\circ\Psi^{-1})(1\otimes X)(f) = -\sum_i f_i(e)\bullet X(g_i) = -X(f).$$

(Beweis von (iv)).

Man beachte, die linke Seite der behaupteten Identität ist wohldefiniert, denn $\Psi^{-1}(1\otimes X)$ liegt nach dem ersten Schritt in L(G).
Nach 4.4.4 (ii) gilt

$$\Psi^{-1}(1\otimes X)(f) = -\sum_i f_i\bullet X(g_i) \tag{1}$$

also

$$(\alpha\circ \Psi^{-1})(1\otimes X)(f) = (-\sum_i f_i\bullet X(g_i))(e) = -\sum_i f_i(e)\bullet X(g_i).$$

Das beweist das erste Gleichheitszeichen.

Wegen $\Delta f = \sum_i f_i \otimes g_i$ gilt weiter

$$f(xy) = \sum_i f_i(x)\bullet g_i(y) \quad \text{für beliebige } x, y \in G,$$

[23] Weil die X_i eine Basis von T_eG über k bilden, bilden die $1\otimes X_i$ eine Basis von $k[G]\otimes_k T_eG$ über k[G]

also

$$f(x) = f(e\bullet x) = \sum_i f_i(e)\bullet g_i(x) \text{ für beliebige } x \in G,$$

also

$$f = \sum_i f_i(e)\bullet g_i,$$

Weil X ein k-Derivation ist, folgt

$$X(f) = \sum_i f_i(e)\bullet X(g_i).$$

Damit gilt auch das zweite Gleichheitszeichen.

3. <u>Schritt</u>. α ist ein k-linearer Isomorphismus. (Beweis des ersten Teils von (i)).
Nach dem zweiten Schritt ist die Abbildung

$$T_eG \longrightarrow k[G]\otimes_k T_eG \xrightarrow{\Psi^{-1}} \mathcal{D}_G \xrightarrow{\alpha_G} T_eG$$
$$X \mapsto 1\otimes X \mapsto (\alpha\circ\Psi^{-1})(1\otimes X) \mapsto (\alpha\circ\Psi^{-1})(1\otimes X)(e)$$

gerade die Multiplikation mit -1, also ein k-linearer Isomorphismus. Das Bild der Abbildung ganz links ist der k-lineare Unterraum $k\otimes_k T_eG$, dessen Bild bei Ψ^{-1} gerade L(G) ist. Wir erhalten so die Zusammensetzung k-linearer Abbildungen

$$T_eG \longrightarrow k\otimes_k T_eG \xrightarrow{\Psi^{-1}} L(G) \xrightarrow{\alpha} T_eG$$
$$X \mapsto 1\otimes X \mapsto (\alpha\circ\Psi^{-1})(1\otimes X) \mapsto (\alpha\circ\Psi^{-1})(1\otimes X)(e).$$

Weil die ersten beiden Teilabbildungen und die Zusammensetzung aller drei bijektiv sind, ist auch α bijektiv, also ein k-lineare Isomorphismus.

4. <u>Schritt</u>. Es gilt $\alpha\circ\rho(x)\circ\alpha^{-1} = \mathrm{Ad}\, x$ für jedes $x \in G$. (Beweis des 2. Teils von (i))
Nach 4.4.4 (i) gilt

$$\Psi\circ\rho(x)\circ\Psi^{-1} = \rho(x)\otimes(\mathrm{Ad}\, x)$$

Weil $\rho(x)$ auf k[X] ein k-Algebra-Homomorphismus ist, folgt

$$(\Psi\circ\rho(x)\circ\Psi^{-1})(1\otimes X) = 1\otimes(\mathrm{Ad}\, x)(X)$$

für jedes $X \in T_eG$. Nach den Betrachtungen des dritten Schritts können wir diese Identität auch in der folgenden Gestalt schreiben

$$(\Psi\circ\rho(x)\circ\alpha^{-1})(X) = 1\otimes(\mathrm{Ad}\, x)(X)$$

und auch in der Gestalt

$$(\rho(x)\circ\alpha^{-1})(X) = \Psi^{-1}(1\otimes(\mathrm{Ad}\, x)(X)) = \alpha^{-1}((\mathrm{Ad}\, x)(X)).$$

Da dies für jedes $X \in T_eG$ gilt, folgt

$$\rho(x)\circ\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\circ(\mathrm{Ad}\, x),$$

also

$$\alpha\circ\rho(x)\circ\alpha^{-1} = \mathrm{Ad}\, x.$$

5. <u>Schritt</u>. Beweis von (ii).
Weil

$$\rho: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(L(G)) = GL(L(G)),\ x \mapsto \rho(x), \tag{1}$$

eine rationale Darstellung ist und

$$\alpha: L(G) \xrightarrow{\cong} T_e G.$$

ein k-linearer Isomorphismus, so ist

$$G \longrightarrow GL(T_e G),\ x \mapsto \alpha\circ\rho(x)\circ\alpha^{-1},$$

ebenfalls eine rationale Darstellung (eine zu (1) äquivalente Darstellung). Dies ist aber nach dem vierten Schritt gerade die Darstellgung

$$Ad: G \longrightarrow GL(T_e G),\ x \mapsto Ad\ x.$$

QED.

4.4.6 Die Dimesion der Lie-Algebra L(G) 72

Für jede lineare algebraische Gruppe G gilt $\dim_k L(G) = \dim G$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \dim_k L(G) &= \dim_k T_e G \quad \text{(nach 4.4.5 (i))} \\ &= \dim G. \end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen besteht, weil jeder Punkt von G nicht-singulär ist.
QED.

4.4.7 L(H) für abgeschlossene Untergruppen H⊆G 72

4.4.7 A Der Homomorphismus $\phi: \mathcal{D}_{G,H} \longrightarrow \mathcal{D}_H$ 72

Seien G eine lineare algebraische Gruppe,

$$H \subseteq G$$

eine abgeschlossene Untergruppe von G und

$$J := \{f \in k[G] \mid f(x) = 0 \text{ für } x \in H\}$$

das Ideal der regulären Funktionen auf G, die in den Punkten von H gleich Null sind. Wir identifizieren

$$k[H] = k[G]/J. \tag{1}$$

und bezeichnen mit

$$\mathcal{D}_{G,H} := \{ D \in \mathcal{D}_G \mid DJ \subseteq J \}$$

die Teilalgebra der Lie-Algebra $\mathcal{D}_G = \mathrm{Der}_k(k[G], k[G])$ der Derivationen, welche das Ideal J in sich überführen, und mit ϕ den Lie-Algebra-Homomorphismus

$$\phi: \mathcal{D}_{G,H} \longrightarrow \mathcal{D}_H,\ D \mapsto (f \bmod J \mapsto Df \bmod J).$$

Ohne die obige Identifikation (1) bekommt ϕ die Gestalt.

$$\phi(D)(f|_H) = D(f)|_H \text{ für } f\in k[G] \text{ und } D\in\mathcal{D}_{G,H}$$

4.4.7 B Das Bild des Differentials der natürlichen Einbettung H ↪ G 72

Mit den Bezeichnungen von 4.4.7 A besteht ein natürlicher Isomorphismus

$$T_e H = \{X \in T_e G \mid X(J) = \{0\}\}.$$

Genauer, das Bild des Differentials

$$di_e: T_e H \hookrightarrow T_e G$$

der natürlichen Einbettung

$$i: H \hookrightarrow G$$

ist gleich

$$\mathrm{Im}(di_e) = \{X \in T_eG \mid X(J) = \{0\}\}. \tag{1}$$

Beweis. Wir bezeichnen die natürliche Einbettung von H in G mit

$$i: H \hookrightarrow G.$$

Die Verpflanzung entlang des natürlichen Homomorphismus

$$i^*: k[G] \longrightarrow k[H],\ f \mapsto f|_H,$$

auf den Faktorraum induziert einen Homomorphismus von Lie-Algebren

$$di_e: T_eH = \mathrm{Der}_k(k[H], k_e) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[G], k_e) = T_eG,\ D \mapsto D\circ i^*.$$

Diese Abbildung ist nach 4.1.9 Aufgabe 4 injektiv. Wegen

$$(D\circ i^*)(J) = = D(i^*(J))\ D(\{0\}) = \{0\}$$

gilt

$$\mathrm{Im}(di_e) \subseteq \{X \in T_eG \mid Xf = 0 \text{ für } f \in J\}.$$

Wir haben noch die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei D aus der Menge auf der rechten Seite. Dann ist die Abbildung

$$\bar{D}: k[G]/J \longrightarrow k_e,\ f \bmod J \mapsto D(f),$$

wohldefiniert und k-linear. Weil D eine Derivation ist, gilt dasselbe für $\bar{D}$.
Wir können $\bar{D}$ als Element von T_eH betrachten. Nach Konstruktion gilt

$$D = \bar{D}\circ\rho = di_e(\bar{D}).$$

Damit besteht auch die umgekehrte Inklusion.
QED.

4.4.7 C Lemma: $\mathcal{D}_{G,H}\cap L(G) \xrightarrow{\cong} L(H)$ *72*

Die Einschränkung des Lie-Algebra-Homomorphismus

$$\phi: \mathcal{D}_{G,H} \longrightarrow \mathcal{D}_H,\ D \mapsto (f \bmod J \mapsto Df \bmod J),$$

von 4.4.7 A auf

$$\mathcal{D}_{G,H}\cap L(G)$$

ist ein Isomorphismus von Lie-Algebren

$$\phi': \mathcal{D}_{G,H}\cap L(G) \xrightarrow{\cong} L(H).$$

<u>Ergänzung</u>: das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
L(H) & \xrightarrow{\phi'^{-1}} & \mathcal{D}_{G,H}\cap L(G) & \hookrightarrow & L(G) \\
& \alpha_H \searrow\cong & & & \cong\downarrow\alpha_G \\
& & T_eH & \overset{di_e}{\hookrightarrow} & T_eG
\end{array}$$

ist kommutativ, wenn α_H und α_G die Isomorphismen von 4.4.5 (i) und

$$di_e: T_eH \hookrightarrow T_eG$$

das Differential der natürlichen Einbettung i: $H \hookrightarrow G$ bezeichnen. Man beachte, das Differential ist injektiv nach 4.1.9 Aufgabe 4.

Beweis. Wir betrachten das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
L(H) \arrow[dd, hook] & L(G)\cap\mathcal{D}_{G,H} \arrow[l, "\phi'"'] \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & L(G) \arrow[dd, equal] \\
& \mathcal{D}_{G,H} \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[d, hook] & \\
\mathcal{D}_H \arrow[d, "\alpha'_H"'] & \mathcal{D}_G \arrow[d, "\alpha'_G"] & L(G) \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\alpha", "\cong"'] \\
T_eH \arrow[r, hook, "\beta"] & T_eG &
\end{tikzcd}$$

Dabei sei

$$\phi: \mathcal{D}_{G,H} \longrightarrow \mathcal{D}_H\ ,\ D \mapsto (f|_H \mapsto (Df)|_H).$$

der in 4.4.7 definierte Lie-Algebra-Homomorphismus und mit ϕ' dessen Einschränkung auf $L(G)\cap\mathcal{D}_{G,H}$, d.h. das linke obere Dreieck des Diagramms ist kommutativ.

Die Abbildung

$$\alpha'_G: \mathcal{D}_G \longrightarrow T_eG,\ D \mapsto (f \mapsto (Df)(e)),$$

sei die in 4.4.5 definierte k-lineare Abbildung, deren Einschränkung $\alpha = \alpha'_G|_{L(G)}$ auf $L(G)$ ein k-linearer Isomorphismus ist, und

$$\alpha'_H: \mathcal{D}_H \longrightarrow T_e,\ D \mapsto (f \mapsto (Df)(e)) \text{ und}$$

sei die analoge Abbildung für H. Insbesondere ist das rechte untere Dreieck des Diagramms kommutativ. Das Viereck darüber ist es auch (es besteht aus natürlichen Abbildungen, die jedes Element in sich abbilden).

Schließlich sei

$$\beta: T_eH \hookrightarrow T_eG,\ D \mapsto (f \mapsto D(f|_H)),$$

das Differential der natürlichen Einbettung $H \hookrightarrow G$ im neutralen Element (welches nach 4.1.9 Aufgabe 4 injektiv ist). Das linke untere Viereck ist ebenfalls kommutativ, denn für $D \in \mathcal{D}_{G,H}$ und $f \in k[G]$ gilt

$$\begin{aligned}
\beta(\alpha'_H(\phi(D)))(f) &= \alpha'_H(\phi(D))(f|_H) && \text{(nach Definition von } \beta) \\
&= \phi(D)(f|_H)(e) && \text{(nach Definition von } \alpha'_H) \\
&= (D(f)|_H)(e) && \text{(nach Definition von } \phi) \\
&= D(f)(e) && \\
&= \alpha'_G(D)(f) && \text{(nach Definition von } \alpha'_G)
\end{aligned}$$

Da dies für jedes $f \in k[G]$ gilt, folgt

$$\beta\circ \alpha'_H\circ\phi = \alpha'_G.$$

Wir haben damit gezeigt, das Diagramm ist kommuttiv. Aus der Kommutativität dieses Diagramm folgt insbesondere die des in der Behauptung angegebenen.

<u>Die Einschränkung</u> ϕ' <u>von</u> ϕ <u>auf</u> $L(G)\cap\mathcal{D}_{G,H}$ <u>ist injektiv</u>.
Auf Grund der Kommutativität des Diagramms ist

die Einschränkung von $\beta\circ\alpha'_H\circ\phi$ auf $L(G)\cap\mathcal{D}_{G,H}$ gleich

$$\beta\circ\alpha'_H\circ\phi|_{L(G)\cap\mathcal{D}_{G,H}} = \alpha'_G|_{L(G)\cap\mathcal{D}_{G,H}} = \alpha'|_{L(G)\cap\mathcal{D}_{G,H}}.$$

Als Isomorphismus ist α insbesonder injektiv. Dasselbe gilt auch für die Einschränkung von α und damit auch für

$$\beta\circ\alpha'_H\circ\phi|_{L(G)\cap\mathcal{D}_{G,H}}.$$

Dann ist aber auch

$$\phi' = \phi|_{L(G)\cap\mathcal{D}_{G,H}}$$

injektiv.

<u>Die Einschränkung</u> ϕ' <u>von</u> ϕ <u>auf</u> $L(G)\cap\mathcal{D}_{G,H}$ <u>ist surjektiv</u>.

Sei $D \in L(H)$ vorgegeben. Wir haben zu zeigen, D liegt im Bild von ϕ'.
Wir setzen

$$X := \alpha'_H(-D), \text{ d.h. } X(f) = -D(f)(e) \text{ für jedes } f \in k[H].$$

Wir wenden die Umkehrung des Isomorphismus

$$\Psi\colon \mathcal{D}_G \xrightarrow{\cong} k[G]\otimes_k T_eG$$

von 4.4.4 auf $1\otimes\beta(X) \in k[G]\otimes_k T_eG$ an. Nach 4.4.5 (iii) gilt

$$\Psi^{-1}(1\otimes\beta(X)) = L(G)$$

und nach 4.4.5 (iv)

$$\alpha'_G(\Psi^{-1}(1\otimes\beta(X))) = -\beta(X) = -\beta(\alpha'_H(-D)) = \beta\circ\alpha'_H(D). \tag{1}$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$\Psi^{-1}(1\otimes\beta(X))(J) \subseteq J, \tag{2}$$

denn dann gilt

$$D' := \Psi^{-1}(1\otimes\beta(X)) \in L(G)\cap\mathcal{D}_{G,H}$$

und

$$\begin{aligned}
\beta(\alpha'_H(\phi'(D'))) &= \beta(\alpha'_H(\phi(D'))) \\
&= \alpha'_G(D') && \text{(Kommutativität des Diagramms)} \\
&= \alpha'_G(\Psi^{-1}(1\otimes\beta(X))) && \text{(Definition von D')} \\
&= \beta\circ\alpha'_H(D) && \text{(nach (1)).}
\end{aligned}$$

Weil β injektiv ist, folgt

$$\alpha'_H(\phi'(D')) = \alpha'_H(D).$$

Wegen $\phi'(D') \in L(H)$ und $D \in L(H)$ (nach Wahl von D) und weil die Einschränkung von α'_H auf $L(H)$ injektiv ist (nach 4.4.5 (i)), folgt

$$D \quad = \phi'(D'),$$

d.h. D liegt tatsächlich im Bild von ϕ'. Der Beweis von der Behauptung ist damit auf den Beweis der Inklusion (2) reduziert. Sei also

$$f \in J$$

ein Element des Ideals $J \subseteq k[G]$ von H im Koordinatenring von G. Weil H eine Untergruppe von G ist gilt $\mu(x,y) \in H$, wenn μ die Multiplikation von G bezeichnet, d.h

$$f\circ\mu: G\times G \longrightarrow G$$

ist eine reguläre Funktion auf $G\times G$, welche identisch Null ist auf $H\times H$, d.h.

$$\Delta(f) = f\circ\mu \in k[G]\otimes_k k[G]$$

liegt im Ideal $I(H\times H)$ von $H\times H$ im Koordinatenring $k[G]\otimes_k k[G]$. Dieses Ideal ist definiert durch die Bedingung

$$\begin{aligned} k[G]\otimes_k k[G] / I(H\times H) &= k[H]\otimes_k k[H] \\ &= (k[G] / J) \otimes_k (k[G] / J) \\ &= k[G]\otimes_k k[G] / (J\otimes_k k[G] + k[G]\otimes_k J), \end{aligned}$$

d.h.

$$I(H\times H) = J\otimes_k k[G] + k[G]\otimes_k J.$$

Es gilt also

$$\Delta(f) \in J\otimes_k k[G] + k[G]\otimes_k J.$$

Wir erhalten

$$\Delta(f) \quad = \sum_i f_i \otimes g_i$$

mit $f_i \in J$, $g_i \in k[G]$ oder $f_i \in k[G]$, $g_i \in J$ für jedes i. Nach 4.4.4 (ii) ist

$$\Psi^{-1}(1\otimes\beta(X))(f) = - \sum_i f_i \bullet \beta(X)(g_i).$$

Der i-te Summand rechts liegt in J falls f_i in J liegt. Liegt f_i nicht in J, so liegt g_i in J und weil $\beta(X)$ im Bild der natülrichen Einbetttung $\beta: T_e H \hookrightarrow T_e G$ liegt, gilt

$$\beta(X)(g_i) = 0$$

(nach 4.4.7 A), so daß auch in diesem Fall der i-te Summand in J liegt. Wir haben gezeigt

$$\Psi^{-1}(1\otimes\beta(X))(f) \in J \text{ für jedes } f \in J,$$

d.h. es gilt (2) und damit die Behauptung.
QED.

4.4.8 $T_e G$ als Lie-Algebra, die F-Struktur von L(G) 72

(i) Von jetzt ab werden wir für jede lineare algebraische Gruppe G die Lie-Algebra L(G) mit dem Tangentialraum $T_e G$ identifiziergen mit Hilfe der Abbildung α von 4.4.5,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathcal{D}_G \arrow[dr, "\alpha'_G"] & \\ L(G) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\alpha", "\cong"'] & T_eG \end{tikzcd}$$

mit

$\mathcal{D}_G \quad = \mathrm{Der}_k(k[G], k[G])$

$T_eG \quad = \mathrm{Der}_k(k[G], k_e)$

$\alpha'_G(D)(f) = (Df)(e)$ für $f \in k[G]$

$\alpha\,(D)(f) = (Df)(e)$ für $f \in L(G)$

Insbesondere vereinbaren wir, daß der Tangentialraum T_eG mit der von $L(G)$ kommenden Lie-Algebra-Struktur versehen ist.
Die Lie-Algebren von linearen algebraischen Gruppen

$$G,\ H,\ \ldots$$

werden wir mit

$$L(G),\ L(H),\ \ldots$$

bezeichen oder auch mit den entsprechenden kleinen fetten Buchstaben[24]

$$\mathbf{g},\ \mathbf{h},\ \ldots$$

(ii) Ist $\phi: G \longrightarrow G'$ ein Homomorphismus von linearen algebraischen Gruppen, so schreiben wir auch

$$d\phi: \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g}'$$

für das Differential $d\phi_e$ von ϕ im neutralen Element (vgl.4.1.3 und 4.1.7) und nennen $d\phi$ Differential von ϕ. Wenn es darauf ankommt einen Unterschied zwischen $L(G)$ und T_eG zu machen, bezeichnen wir mit

$$L(\phi): L(G) \longrightarrow L(G')$$

die eindeutig bestimmte k-lineare Abbildung, für welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} L(G) \arrow[r, "\alpha_G"] \arrow[d, "L(\phi)"'] & T_eG \arrow[d, "d\phi_e"] \\ L(G') \arrow[r, "\alpha_{G'}"] & T_{e'}G' \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, d.h.

$$L(\phi) := \alpha'^{-1}_{G'} \circ d\phi_e \circ \alpha'_G$$

(iii) Ist $F \subseteq k$ ein Teilkörper und G eine F-Gruppe, so bezeichnen wir den F-Vektorraum $T_eG(F)$ der F-rationalen Punkte von T_eG (vgl. 4.1.8) auch mit

$$L(G)(F) := T_eG(F) \text{ oder } \mathbf{g}(F) := T_eG(F).$$

Dies ist eine Lie-Algebra über F. Betrachten wir $L(G)(F)$ mit Hilfe von α als F-linearen Unterraum von $L(G)$ so gilt

$$L(G)(F) = L(G) \cap \mathcal{D}_G(F) \text{ mit } \mathcal{D}_G(F) =^{[25]} \mathrm{Der}_F(F[G], F[G])$$

---

[24] im Original werden gothische anstelle von fetten Buchstaben verwendet.

(iv) Ist $F \subseteq k$ ein Teilkörper und $\phi\colon G \longrightarrow G'$ ein über F definierter Homorphismus von F-Gruppen, so induziert

$$d\phi\colon \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g}'$$

eine F-lineare Abbildung

$$\mathbf{g}(F) \longrightarrow \mathbf{g}'(F).$$

Beweis von (iii) und (iv).
<u>Zu (iii)</u>.
1. <u>Schritt</u>. $\mathcal{D}_G(F) := \mathrm{Der}_F(F[G],F[G])$ ist eine F-Struktur von $\mathcal{D}_G = \mathrm{Der}_k(k[G], k[G])$.
Genauer, es gibt Isomorphismen

$$k\otimes_F \mathcal{D}_G(F) \cong \mathrm{Der}_k(k\otimes_F F[G], k\otimes_F F[G]) \cong \mathrm{Der}_k(k[G], k[G]) = \mathcal{D}_G.$$

$$c\otimes D \mapsto (d\otimes f \mapsto (cd)\otimes D(f)) \mapsto (f = \sum_i c_i f_i \text{ mit } f_i \in F[X] \mapsto \sum_i cdc_i D(f_i))$$

(vgl. auch Bemerkung 4.1.8 (i)).
Dies ist die Aussage des zweiten Schritts im Beweis von Bemerkung 4.4.4 (iii).
2. <u>Schritt</u>. Es gilt $\alpha^{-1}(T_eG(F)) = L(G)\cap\mathcal{D}_G(F)$
Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
L(G) \arrow[r, hook] & \mathcal{D}_G = \mathrm{Der}_k(k[G].k[G]) \arrow[r, "\alpha_G"] & T_eG = \mathrm{Der}_k(k[G],k_e) \\
L(G)\cap\mathcal{D}_G(F) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook, "\psi'"] & \mathcal{D}_G(F) = \mathrm{Der}(F[G],F[G]) \arrow[r, "\alpha_G(F)"] \arrow[u, hook, "\psi"] & T_eG(F) = \mathrm{Der}_F(F[G],F_e) \arrow[u, hook, "\psi''"]
\end{tikzcd}$$

Dabei sei

$$\alpha'_G\colon \mathcal{D}_G \longrightarrow T_eG,\ D \mapsto (f \mapsto (Df)(e)),$$

die k-lineare Abbildung von 4.4.5, deren Einschränkung

$$\alpha := \alpha'_G|_{L(G)}\colon L(G) \xrightarrow{\cong} T_eG$$

ein k-linearer Isomorphismus ist.
Die mittlere vertikale Abbildung ψ sei die am Ende des ersten Schritts beschriebene Einbettung,

$$D \mapsto 1\otimes D,$$

durch welche $\mathcal{D}_G(F)$ zu einer F-Struktur von $\mathcal{D}_G$ wird.
Die linke vertikale Abbildung ψ' sei die Einschränkung von ψ auf $L(G)\cap\mathcal{D}_G(F)$, sodaß das linke Viereck des Diagramms kommutativ ist.
Schließlich sei die rechte vertikale Abbildung ψ'' die im Beweis von Bemerkung 4.1.8 (i) beschriebene Abbildung

$$D \mapsto 1\otimes D,$$

durch welche $T_eG(F)$ zu einer F-Struktur von T_eG wird. Die untere horizontale Abbildung $\alpha'_G(F)$ sei das Analogon von α'_G über F, d.h. die Abbildung

$$\alpha'_G(F)\colon \mathcal{D}_G(F) \longrightarrow T_eG(F),\ D \mapsto (f \mapsto (Df)(e)),$$

[25] vgl. 4.4.4 (iii).

Direkt an den Abbildungsvorschriften liest man ab, daß auch das rechte Viereck des Diagramms kommutativ ist. Die Zusammensetzung

$$\beta': L(G)\cap \mathcal{D}_G(F) \longrightarrow T_eG(F)$$

der Abbildungen der unteren Zeile wird durch das Diagramm gerade die Einschränkung der Zusammensetzungen

$$\alpha: L(G) \longrightarrow T_eG$$

der Abbildungen der oberen Zeile. Es gilt damit

$$L(G)\cap\mathcal{D}_G(F) \subseteq \alpha^{-1}(T_eG(F)). \tag{1}$$

Wir haben noch die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei

$$D \in \alpha^{-1}(T_eG(F)).$$

Wir setzen

$$X := -\alpha(D) \in T_eG(F) = Der_F(F[G], F_e).$$

Weil G eine F-Gruppe ist, ist die Umkehrung des Isomorphismus

$$\Psi: \mathcal{D}_G \xrightarrow{\cong} k[G]\otimes_k T_eG,$$

von 4.4.4 über F definiert, d.h. es gilt

$$\Psi^{-1}(1\otimes X) \in \mathcal{D}_G(F).$$

(vgl. 4.4.4 (iii)). Nach 4.4.5 (iii) gilt außerdem

$$\Psi^{-1}(1\otimes X) \in L(G),$$

zusammen also

$$\Psi^{-1}(1\otimes X) \in L(G)\cap\mathcal{D}_G(F). \tag{2}$$

Außerdem gilt

$\alpha(\Psi^{-1}(1\otimes X))$	$= -X$	(nach 4.4.5 (iv))
	$= \alpha(D)$	(nach Definition von X)

Weil α ein Isomorphismus ist (nach 4.4.5 (i)), folgt

$$D = \Psi^{-1}(1\otimes X).$$

Zusammen mit (2) erhalten wir $D \in L(G)\cap\mathcal{D}_G(F)$. Damit besteht auch die zu (1) umgekehrte Inklusion, d.h. es gilt die Behauptung.

3. Schritt. Die Einschränkung der Lie-Klammer von L(G) definiert auf dem F-Vektorraum L(G)(F) die Struktur einer Lie-Algebra.

Nach (i) identifiziert der k-lineare Isomorphismus

$$\alpha: L(G) \xrightarrow{\cong} T_eG$$

die Lie-Algebra L(G) mit dem Tangentialraum T_eG und definiert so die Lie-Algebra-Struktur von T_eG. Mit anderen Worten, nach Definition der Lie-Algebra-Struktur von T_eG ist α ein Isomorphismus von Lie-Algebren. Verwenden wir die Identifikation α um $L(G)(F) = T_eG(F)$ mit einem F-linearen Unterraum von L(G) zu identifizieren, so wird

$$L(G)(F) = \alpha^{-1}(T_eG(F)) \qquad (\subseteq L(G))$$

zu einer F-Struktur von L(G) (vgl. Bemerkung 1.3.7 B(vi)) und α zu einem F-Isomorphismus. Nach dem zweiten Schritt ist damit aber

$$L(G)(F) = \alpha^{-1}(T_eG(F)) = L(G)\bigcap\mathcal{D}_G(F)$$

der Durchschnitt der Lie-Teilalgebren L(G) und $\mathcal{D}_G(F)$ von $\mathcal{D}_G$. Die Lie-Klammer zweier Elemente von L(G)(F) liegt also wieder in L(G)(F). Die Einschränkung der Lie-Klammer von

$$\mathcal{D}_G = Der_k(k[G], k[G])$$

auf L(G)(F) definiert eine Lie-Klammer

$$L(G)(F) \times L(G)(F) \longrightarrow L(G)(F), (D', D'') \mapsto [D', D''] = D'\circ D'' - D''\circ D',$$

und definiert so auf L(G)(F) die Struktur einer Lie-Algebra.

Zu (iv). Weil $\phi: G \longrightarrow G'$ ein F-Morphismus ist, ist der k-Algebra-Homomorphismus der Koordinaten-Ringe

$$\phi^*: k[G'] \longrightarrow k[G]$$

über F definiert, d.h.

$$\phi^*(F[G']) \subseteq F[G]$$

Damit ist das Differential mit neutralen Element

$$d\phi_e: T_eG \longrightarrow T_{e'}G', X \mapsto X\circ\phi^*,$$

über F-Definiert: für $X \in T_eG(F) = Der_F(F[G], F_e)$ gilt

$$\begin{aligned}(X\circ f^*)(F[G']) &= X(f^*(F[G'])) \\ &= X(F[G]) \\ &\subseteq F_e\end{aligned}$$

Dabei ist F_e als F[G']-Modul gleich $F_{e'}$. Für $X \in T_eG(F)$ gilt damit

$$d\phi_e(X)(F[G'] = (X\circ f^*)(F[G']) \subseteq F_{e'} \ ,$$

also

$$d\phi_e(T_eG(F)) \subseteq T_{e'}G'(F),$$

d.h. $d\phi_e$ ist tatsächlich über F definiert, induziert also eine F-lineare Abbildung

$$d\phi_e|_{T_eG(F)}: T_eG(F) \longrightarrow T_{e'}G'(F)$$

wie behauptet.
QED.

4.4.9 Proposition: dφ als Lie-Algebra-Morphismus 72

Sei $\phi: G \longrightarrow G'$ eine Homomorphismus von linearen algebraischen Gruppen. Dann sind

$$d\phi_e: T_eG \longrightarrow T_{e'}G'$$

und

$$L(\phi): L(G) \longrightarrow L(G')$$

ein Homomorphismen von Lie-Algebren, die im Fall einer positiven Charakteristik p des Grundkörpers mit den p-Operationen kommutierten.
Bemerkungen

(i) Auf Grund der Definition der Lie-Algebra-Strukturen auf den Tangentialräumen $T_e G$ und $T_e G'$ in 4.4.8 (i) und der Definition von $L(\phi)$ in 4.4.8 (ii), reicht es, die Behauptung für eine der beiden Abbildungen $d\phi_e$ und $L(\phi)$ zu beweisen.

(ii) Die Argumentation für den Beweis des Falles einer abgeschlossenen Einbettung

$$\phi: G \hookrightarrow G'$$

lautet im Original, daß die Identität

$$\alpha_G^{-1}(X)(f\circ\phi) = (\alpha_{G'}^{-1}(d\phi_e(X)))(f) \text{ für } X \in T_e G \text{ und } f \in k[H]$$

bestehe und daraus die Behauptung folge. Diese Identität ist insofern problematisch als die beiden Seiten in verschiedenen Ringen liegen:

$$(\alpha_H^{-1}(d\phi_e(X)))(f) \in k[H] \text{ und } \alpha_G^{-1}(X)(f\circ\phi) \in k[G] = k[H]/J.$$

Man kann also bestenfalls erwarten, es gilt

$$\alpha_G^{-1}(X)(f\circ\phi) = (\alpha_{G'}^{-1}(d\phi_e(X)))(f) \text{ mod } J. \tag{*}$$

Im ersten Schritt des nachfolgenden Beweises beschäftigen wir uns mit einer Identität, die im wesentlichen mit dieser übereinstimmt.

(iii) Im Anschluß an den Beweis der Proposition geben wir in einer etwas laxen Argumentation an, wie man aus der Identät (*) auf die Behauptunt für abgeschlossene Einbettungen schließen kann.

Beweis

1. Schritt. Für $X \in T_e G$ und $x \in G$ gilt

$$\alpha_G^{-1}(X)_x \circ \phi^* = \alpha_{G'}^{-1}((d\phi_e)(X))_{\phi(x)} \tag{1}$$

Für $D \in L(G)$ und $x \in G$ gilt

$$D_x \circ \phi^* = (L(\phi)(D))_{\phi(x)} \tag{2}$$

(die beiden Identitäten sind äquivalent).

Wir haben zu zeigen, für jedes $f \in k[G']$ gilt

$$\alpha_G^{-1}(X)_x\,(f\circ\phi) = \alpha_{G'}^{-1}((d\phi_e)(X))_{\phi(x)}\,(f)$$

Für die linke Seite der behaupteten Identität erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \alpha_G^{-1}(X)_x\,(f\circ\phi) \\
&= ((dL_x)_e(\alpha_{G'}^{-1}(X)_e))(f\circ\phi) && (\alpha_G^{-1}(X) \text{ ist invariant, vgl. Bem. 4.4.3I(iv))} \\
&= ((dL_x)_e(X))(f\circ\phi) && (\text{denn } \alpha_G^{-1}(X)_e = \alpha_G(\alpha_G^{-1}(X)) = X) \\
&= (X\circ L_x^*)(f\circ\phi) && (\text{Definition des Differentials in 4.1.3}) \\
&= (X\circ L_x^*\circ\phi^*)(f) && (\text{Definition von } \phi^*) \\
&= (X\circ(\phi\circ L_x)^*)\,(f) && (\text{Der Funktor “*” ist kontravarient})
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite ergibt sich

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \alpha_{G'}^{-1}((d\phi_e)(X))_{\phi(x)}\,(f) \\
&= ((dL_{\phi(x)})(\alpha_H^{-1}((d\phi_e)(X))_{\phi(e)}))(f) && (\alpha_{G'}^{-1}(\ldots) \text{ ist invariant})
\end{aligned}$$

$= ((dL_{\phi(x)})((d\phi_e)(X)))(f)$ (denn $\alpha_{G'}^{-1}(?)_{\phi(e)} = \alpha_{G'}(\alpha_{G'}^{-1}(?)) = ?$)

$= ((dL_{\phi(x)})(X\circ\phi^*)(f)$ (Definition des Differentials)

$= (X\circ\phi^*\circ L^*_{\phi(x)})(f)$ (Definition des Differentials)

$= (X\circ(L_{\phi(x)}\circ\phi)^*)(f)$ (Der Funktor "*" ist kontravariant)

Der Beweis von (1) ist damit auf den Beweis von

$$\phi\circ L_x = L_{\phi(x)}\circ\phi. \qquad (3)$$

zurückgeführt. Der Beweis von (3) ergibt sich aber aus der Tatsache, daß ϕ ein Gruppen-Homomorphismus ist: für $y \in G$ gilt:

$(\phi\circ L_x)(y) = \phi(xy)$ (Defininition von L_x)

$= \phi(x)\bullet\phi(y)$ (denn ϕ ist ein Homomorphismus)

$= L_{\phi(x)}(\phi(y))$

$= (L_{\phi(x)}\circ\phi)(y)$.

Damit ist (1) bewiesen.

Weil $\alpha_G: L(G) \longrightarrow T_eG$ ein Isomorphismus ist, hat jedes $D \in L(G)$ die Gerstalt

$$D = \alpha_G^{-1}(X) \text{ mit } X \in T_eG.$$

Wir ersetzen X in (1) durch $\alpha_G(D)$ und erhalten

$$D_x\circ\phi^* = \alpha_{G'}^{-1}((d\phi_e)(\alpha_G(D)))_{\phi(x)}$$

$$= (L(\phi)(D))_{\phi(x)}$$ (vgl. die Definition von $L(\phi)$ in 4.4.8 (ii)).

2. Schritt. Reduktion des Beweises der Behauptung auf die beiden folgenden Spezialfälle.

(a) ϕ ist eine abgeschlossene Einbettung.

(b) ϕ ist surjektiv.

Der Homomorphismus faktorisiert sich wie folgt.

$$\phi: G \xrightarrow{\phi'} G\times H \xrightarrow{\phi''} H$$

mit Homomorphismen ϕ', ϕ'' von linearen algebraischen Gruppen mit

$\phi'(x) := (x, \phi(x))$ für $x \in G$

$\phi''(x,y) := y$ für $(x,y) \in G\times H$.

Dabei ist ϕ'' surjektiv. Es reicht zu zeigen, ϕ' ist eine abgeschlossene Einbettung. Als Bild eines Homomorphismus von linearen algebraischen Gruppen ist

$$\phi'(G)$$

eine abgeschlossene Untergruppe von $G\times H$ (vgl. 2,2,5 (ii)). Es reicht zu zeigen,

$$\phi': G \longrightarrow \phi'(G), \qquad (4)$$

ist ein Isomorphismus. Die Einschränkung der Projektion auf den ersten Faktor,

$$p: \phi'(G) \longrightarrow G,\ (x,y) \mapsto x,$$

ist Homomorphimus von linearen algebraischen Gruppen. Es gilt für $x \in G$

$$p(\phi'(x)) = p(x, \phi(x)) = x \text{ für jedes } x \in G,$$

also

$$p\circ\phi' = id_G.$$

Weiter gilt für $(x, \phi(x)) \in \phi'(G)$

$$\phi'(p(x, (x, \phi(x)))) = \phi'(x) = (x, \phi(x)),$$

also

$$\phi'\circ p = id_G.$$

Also ist (4) tatsächlich ein Isomorphismus.

3. <u>Schritt</u>. Beweis der Behauptung für den Fall, daß

$$\phi: G \twoheadrightarrow G'$$

surjektiv ist.

Der auf den Koordinatenringen induzierte k-Algebra-Homorphismus

$$\phi^*: k[G'] \hookrightarrow k[G], f' \mapsto f'\circ\phi,$$

ist injektiv. Wir können bei Bedarf k[G'] mit seinem Bild in k[G] identifizieren und k[G'] als Teilalgebra von k[G] auffassen. Die Identität (2) des ersten Schritts bekommt dann die Gestalt

$$D(f)(\phi(x)) = ((L(\phi)(D))(f))(\phi(x)) \text{ für jedes } f \in k[G'] \text{ und jedes } x \in G$$

d.h.

$$Df = (L(\phi)(D))f \text{ für jedes } f \in k[G']$$

d.h.

$$L(\phi)(D) = D|_{k[G']}. \tag{5}$$

Man beachte, D ist auf k[G] definiert, $L(\phi)(D)$ jedoch nur auf der "Teilalgebra" k[G'].
Weil das Bild der Derivation $L(\phi)(D)$ in k[G'] liegt, gilt insbesondere

$$D(k[G']) \subseteq k[G'] \text{ für jedes } D \in L(G). \tag{6}$$

Mit (5) und (6) ist aber $L(\phi)$ ein Lie-Algebra-Homomorphismus: für $D',D'' \in L(G)$ gilt

$$\begin{aligned} L(\phi)([D',D'']) &= [D', D'']\,|_{k[G']} \\ &= (D'\circ D'' - D''\circ D')\,|_{k[G']} \\ &= (D'|_{k[G']}\circ D''|_{k[G']} - D''|_{k[G']}\circ D'\,|_{k[G']}) \\ &= L(\phi)(D')\circ L(\phi)(D'') - L(\phi)(D'')\circ L(\phi)(D') \\ &= [L(\phi)(D'), L(\phi)(D'')], \end{aligned}$$

d.h. $L(\phi)$ ist tatsächlich ein Lie-Algebra-Homomorphismus.
Ist die Charakteristik des Grundkörpers, so können wir die analoge Rechnung auch für die p-Operationen durchführen: für jedes $D \in L(G)$ gilt

$$\begin{aligned} L(\phi)(D^p) &= (D^p)\,|_{k[G']} \\ &= (D\,|_{k[G']})^p \\ &= (L(\phi)(D))^p, \end{aligned}$$

d.h. $L(\phi)$ kommutiert tatsächlich mit den p-Operationen.

4. <u>Schritt</u>. Beweis der Behauptung für den Fall, daß

$$\phi: G \hookrightarrow G'$$

eine abgeschlossene Einbettung ist.

Zum Beweis verwenden wir den Lie-Algebra Isomorphismus von 4.4.7 C den wir hier mit $\widetilde{\phi}$ bezeichnen wollen,

$$\widetilde{\phi}: \mathcal{D}_{H,\phi(G)} \cap L(\phi(G)) \xrightarrow{\cong} L(\phi(G)),\ D \mapsto (f|_{\phi(G)} \mapsto D(f)|_{\phi(G)})$$

(mit $f \in k[G']$), und den Isomorphismus

$$\widetilde{\psi}: L(\phi(G)) \xrightarrow{\cong} L(G),\ D \mapsto \psi^* \circ D \circ (\psi^*)^{-1},$$

wobei ψ den Isomorphismus

$$\psi: G \xrightarrow{\cong} \phi(G),\ x \mapsto \phi(x),$$

bezeichne. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_{G',\phi(G)} \cap L(\phi(G)) \arrow[r, "\widetilde{\phi}", "\cong"'] \arrow[dd, hook] & L(\phi(G)) \arrow[r, "\widetilde{\psi}", "\cong"'] & L(G) \arrow[r, "\alpha_G"] \arrow[d, "L(\phi)"] & T_eT \arrow[d, "d\phi_e"] \\
 & & L(G') \arrow[r, "\alpha_{G'}"] \arrow[d, hook] & T_{e'}G' \\
\mathcal{D}_{G',\phi(G)} \arrow[rr, hook] & & \mathcal{D}_{G'} &
\end{tikzcd} \tag{7}$$

dessen rechtes Viereck nach Definition von $L(\phi)$ kommutativ ist (vgl. 4.4.8 (ii)). Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß auch das linke untere Viereck kommutativ ist, d.h.

$$L(\phi) \circ \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi} = \mathrm{id}_{\mathcal{D}_{H,G} \cap L(\phi(G))}\ , \tag{8}$$

denn dann können wir für $D', D'' \in L(G)$ Elemente $\widetilde{D}', \widetilde{D}'' \in \mathcal{D}_{H,G} \cap L(\phi(G))$ wählen mit

$$D' = (\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi})(\widetilde{D}') \text{ und } D'' = (\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi})(\widetilde{D}'').$$

und des gilt

$$\begin{aligned}
L(\phi)([D',D'']) &= L(\phi)([(\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi})(\widetilde{D}'), (\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi})(\widetilde{D}'')]) \\
&= L(\phi)((\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi})([\widetilde{D}', \widetilde{D}''])) && (\widetilde{\phi} \text{ und } \widetilde{\psi} \text{ sind Lie-Algebra-Homomorphismen}) \\
&= (L(\phi) \circ \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi})([\widetilde{D}', \widetilde{D}'']) \\
&= [\widetilde{D}', \widetilde{D}''] && (\text{wegen } (8)) \\
&= [(L(\phi) \circ \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi})(\widetilde{D}'), (L(\phi) \circ \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi})(\widetilde{D}'')] && (\text{wegen } (8)) \\
&= [L(\phi)(D'), L(\phi)(D'')] && (\text{nach Wahl von } \widetilde{D}' \text{ und } \widetilde{D}'')
\end{aligned}$$

d.h. $L(\phi)$ ist tatsächlich ein Lie-Algebra-Homomorphismus. Außerdem können wir im Fall einer positiven Charakteristik p zu vorgebenen $D \in L(G)$ ein $\widetilde{D} \in \mathcal{D}_{H,G} \cap L(\phi(G))$ wählen mit

$$D = (\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi})(\widetilde{D}).$$

Aus den Abbildungsvorschriften von $\widetilde{\psi}$ und $\widetilde{\phi}$ liest man ab, daß diese mit der p-Operation kommutieren. Insbesondere gilt

$$(\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\phi})(\widetilde{D}^p) = ((\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\phi})(\widetilde{D}))^p \tag{9}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
L(\varphi)(D^p) &= L(\varphi)(\ (\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\phi})(\widetilde{D}))^p\ ) && \text{(nach Wahl von } \widetilde{D}\text{)}\\
&= L(\varphi)(\ (\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\phi})(\widetilde{D})^p)\ ) && \text{(wegen (9))}\\
&= (L(\varphi)\circ\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\phi})(\ (\widetilde{D})^p\ ) && \\
&= (\widetilde{D})^p && \text{(wegen (8))}\\
&= ((L(\varphi)\circ\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\phi})(\widetilde{D})\ )^p && \text{(wegen (8))}\\
&= (\ L(\phi)(D)\ )^{\,p} && \text{(nach Wahl von } \widetilde{D}\text{)}
\end{aligned}$$

d.h. $L(\phi)$ kommutiert tatsächlich mit den p-Operationen.
Damit ist der Beweis der Behauptung auf den der Kommutativität des linken unteren Vierecks des Diagramms (7) zurückgeführt.

Für $D \in \mathcal{D}_{G',\phi(G)} \cap L(\phi(G))$ und $f \in k[H]$ gilt

$$\begin{aligned}
(\alpha_{G'}\circ L(\phi)\circ\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\phi})(D)(f) &=^{26} (d\phi_e\circ\alpha_G\circ\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\phi})(D)(f)\\
&= (d\phi_e\circ\alpha_G\circ\widetilde{\psi})(\widetilde{\phi}(D))\ (f)\\
&=(d\phi_e\circ\alpha_G)(\psi^*\circ\widetilde{\phi}(D)\ \circ(\psi^*)^{-1})\ (f) && \text{(nach Definition von } \widetilde{\psi}\text{)}\\
&= d\phi_e(\ \ (\psi^*\circ\widetilde{\phi}(D)\ \circ(\psi^*)^{-1})_e\ \ )(f) && \text{(nach Definition von } \alpha_G\text{)}\\
&= (\psi^*\circ\widetilde{\phi}(D)\ \circ(\psi^*)^{-1})_e(\phi^*(f)) && \text{(nach Definition von } d\phi_e \text{ in 4.1.3)}\\
&= (\psi^*\circ\widetilde{\phi}(D)\ \circ(\psi^*)^{-1})(\phi^*(f))(e) && \text{(vgl. Bemerkung 4.4.3I (iv))}\\
&= (\psi^*\circ\widetilde{\phi}(D))((\psi^*)^{-1}(\phi^*(f)))(e) && \\
&= (\psi^*\circ\widetilde{\phi}(D))((\phi\circ\psi^{-1})^*(f)))(e) && \text{(der Funktor * ist kontravariant)}\\
&= (\psi^*\circ\widetilde{\phi}(D))(f|_{\phi(G)}))(e) && (\phi\circ\psi^{-1} \text{ ist die Einbettung } \phi(G)\hookrightarrow H)\\
&= \psi^*(D(f)|_{\phi(G)})(e) && \text{(Definition von } \widetilde{\phi}\text{)}\\
&= (D(f)|_{\phi(G)})(\psi(e)) && \text{(Definition von } \psi^*\text{)}\\
&= D(f)(\phi(e)) && \text{(Definition von } \psi\text{)}\\
&= \alpha_{G'}(D)(f) && \text{(Definition von } \alpha_{G'}\text{)}
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\alpha_{G'}\circ L(\phi)\circ\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\phi} = \alpha_{G'}\ \ .$$

---

[26] auf Grund der Kommutativität des rechten oberen Vierecks im Diagramm (7).

Weil α_G, ein Isomorphismus ist, gilt damit die Identität (8), d.h. das linke untere Viereck des Diagramms (7) ist kommutativ, d.h. es gilt die Behauptung.
QED.

Zur Folgerung der Behauptung in Fall abgeschlossener Einbettung aus der Identität (*) von Bemerkung (ii).

Für X, Y $\in T_e G$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\alpha_H^{-1}(d\phi_e([X,Y]))|_G &= \alpha_G^{-1}([X,Y]) && \text{(nach (*))}\\
&= [\alpha_G^{-1}(X), \alpha_G^{-1}(Y)] && \text{(Definition der Lie-Klammer auf } T_e G)\\
&= [\alpha_H^{-1}(d\phi_e(X))|_G , \alpha_H^{-1}(d\phi_e(Y))|_G] && \text{(nach (*))}\\
&= [\alpha_H^{-1}(d\phi_e(X)) , \alpha_H^{-1}(d\phi_e(Y))] \,|_G\\
&= \alpha_H^{-1}([d\phi_e(X)), d\phi_e(Y))] \,|_G && \text{(Definition der Lie-Klammer auf } T_e H).
\end{aligned}
$$

Auswertung im neutralen Element ergibt

$$d\phi_e([X,Y]) = [d\phi_e(X)), d\phi_e(Y))].$$

Die Verträglichkeit mit der p-Operation im Fall einer postiven Charakteristik des Grundkörpers wird analog bewiesen:

$$
\begin{aligned}
\alpha_H^{-1}(d\phi_e(X^{[p]}))|_G &= \alpha_G^{-1}(X^{[p]}) && \text{(nach (*))}\\
&= \alpha_G^{-1}(X)^p && \text{(Definition der p-Operaton auf } T_e G)\\
&= ((\alpha_H^{-1}(d\phi_e(X)))|_G)^p && \text{(nach (*))}\\
&= \alpha_H^{-1}(d\phi_e(X))^p|_G\\
&= \alpha_H^{-1}(d\phi_e(X)^{[p]})|_G && \text{(Definition der p-Operaton auf } T_e H)
\end{aligned}
$$

Auswertung im neutralen Element ergibt

$$d\phi_e(X^{[p]}) = d\phi_e(X)^{[p]}.$$

4.4.10 Beispiele für L(G) 73

4.4.10 Beispiel 1: die additive Gruppe 73

Sei G = $\mathbf{G}_a$ die additive Gruppe. Der Koordinatenring von G ist dann ein Polynomring in einer Unbestimmten,

$$k[G] = k[T]$$

(vgl. 2.1.4 Beispiel 1). Die Derivationen von k[G], die mit den Translationen

$$G \longrightarrow G,\ T \mapsto T+a,$$

(mit a $\in$ k) kommutieren, sind gerade die Vielfachen von

$$X = \frac{d}{dT}\,.$$

Ist die Charakteristik p des Grundkörpers positiv, so gilt

$$X^p = 0.$$

Damit ist g := L(G) = L(G_a) die eindimensionale Lie-Algebra

$$L(G) = k\bullet X$$

mit

$$[X,X] = 0$$

und mit $X^p = 0$ (letzteres im Fall $p > 0$).

Beweis. 1. Schritt: $L(G) \subseteq k\bullet X$.

Sei $D \in L(G) \subseteq Der_k(k[G], k[G])$. Nach der Produktregel gilt

$$DT^n \quad = n\bullet T^{n-1}\bullet DT \text{ jede nicht-negative ganze Zahl n.}$$

also

$$(DT^n)(x) \quad = n\bullet x^{n-1}\bullet DT \quad \text{für jedes } x \in k$$

Weil D linear über k ist, folgt für jedes $f \in k[T]$

$$Df \quad = \frac{df}{dT}\bullet DT \ \in k[T]\bullet \frac{df}{dT}$$

Außerdem soll D invariant sein, d.h. es gilt

$$D\circ\lambda_a = \lambda_a\circ D \text{ für } a \in k,$$

also

$$\begin{aligned}(D\circ\lambda_a)(f) &= Dg \\ &= \frac{dg}{dT}\bullet DT \\ &= \frac{df}{dT}(T\text{-}a)\bullet(DT)(T)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\lambda_a\circ D)(f) &= (Df)(T\text{-}a) \\ &= (\frac{df}{dT}\bullet DT)(T\text{-}a) \\ &= \frac{df}{dT}(T\text{-}a)\bullet(DT)(T\text{-}a)\end{aligned}$$

sind gleich für alle a, d.h.

$$\frac{df}{dT}(T\text{-}a)\bullet(DT)(T) = \frac{df}{dT}(T\text{-}a)\bullet(DT)(T\text{-}a)$$

für jedes f und jedes a. Speziell für f = T erhalten wir

$$1\bullet(DT)(T) = 1\bullet(DT)(T\text{-}a)$$

d.h. (DT)(T-a) hängt nicht von a ab, d.h.

$$D(T) \in k$$

Es folgt

$$D \quad = k\bullet X.$$

2. Schritt. $L(G) = k\bullet X$.

Wir haben noch zu zeigen, X ist invarient, d.h. es gilt

$$X\circ\lambda_a = \lambda_a\circ X$$

für jedes $a \in k$.

Sei

$$g(T) := \lambda_a f = f(T\text{-}a).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}(X\circ\lambda_a)(f) &= Xg \\ &= \frac{dg}{dT}\bullet DT\end{aligned}$$

$$= \frac{df}{dT}(T\text{-}a)\bullet DT$$
$$= (Xf)(T\text{-}a)$$
$$= (\lambda_a \circ X)(f),$$

also

$$X\circ\lambda_a = \lambda_a\circ X$$

3. Schritt. $X^p = 0$.
Es gilt

$$X T^n \quad = n\bullet T^{n-1}$$
$$X^2 T^n \quad = n\bullet(n-1)\bullet T^{n-2}$$
$$\dots$$
$$X^p T^n \quad = n\bullet(n-1)\bullet\dots\bullet(n-p+1)\bullet T^{n-p}$$

Von den Zahlen n, n-1,...,n-p+1 ist eine durch p teilbar, d.h. es ist

$$X^p T^n \quad = 0.$$

Weil X eine k-lineare Abbildung ist, so gilt dasselbe für X^p, d.h. es ist

$$X^p(f) = 0 \text{ für jedes } f \in k[T]$$

also

$$X^p = 0.$$

QED.

4.4.10 Beispiel 2: die multiplikative Gruppe 73

Sei G := $\mathbf{G}_m$ die multiplikative Gruppe. Der Koordinatenring von G hat die Gestalt

$$k[G] = k[T, T^{-1}]$$

mit einer Unbestimmten T (vgl. 2.1.4 Beispiel 2). Die k-Derivationen von k[G], die mit den Translationen

$$G \longrightarrow G,\ T \mapsto a\bullet T,$$

($a \in k^*$) kommutieren, sind gerade die Vielfachen von

$$X := T\bullet \frac{d}{dT}.$$

Damit ist L(G) die eindimensionale Lie-Algebra

$$L(G) = k\bullet X$$

mit

$$[X, X] = 0.$$

Die Lie-Klammer ist dieselbe wie die der additiven Gruppe.
Ist die Charakteristik p des Grundkörpers positiv, so gilt

$$X^p = X.$$

Die p-Operation ist also eine andere (im Fall $p > 0$).

Beweis. 1. Schritt: $L(G) \subseteq k\bullet X$.

Sei $D \in L(G) \subseteq Der_k(k[G], k[G])$. Nach der Produktregel gilt

$$DT^n \quad = n\bullet T^{n-1}\bullet DT \text{ für jede ganze Zahl n.}$$

also

Weil D linear über k ist, folgt für jedes $f \in k[T]$

$$Df \quad = \frac{df}{dT}\bullet DT \ \in k[T]\bullet \frac{df}{dT}$$

Außerdem soll D invariant sein, d.h. es gilt

$$D\circ\lambda_a = \lambda_a\circ D \text{ für } a \in k,$$

also

$$(D\circ\lambda_a)(f) = Dg$$
$$= \frac{dg}{dT}\cdot DT$$
$$= a^{-1}\cdot\frac{df}{dT}(a^{-1}T)\cdot(DT)(T)$$

und

$$(\lambda_a\circ D)(f) = (Df)(a^{-1}T)$$
$$= (\frac{df}{dT}\cdot DT)(a^{-1}T)$$
$$= \frac{df}{dT}(a^{-1}T)\cdot(DT)(a^{-1}T)$$

sind gleich für alle a, d.h.

$$a^{-1}\cdot\frac{df}{dT}(a^{-1}T)\cdot(DT)(T) = \frac{df}{dT}(a^{-1}T)\cdot(DT)(a^{-1}T)$$

für jedes f und jedes a. Speziell für f = T erhalten wir

$$a^{-1}\cdot(DT)(T) = a\cdot(DT)(a^{-1}T)$$

d.h.DT ist homogen vom Grad 1, d.h. $DT \in k\cdot T$ und

$$D \in k\cdot T\cdot\frac{d}{dT}$$

2. <u>Schritt</u>. $L(G) = k\cdot X$.
Wir haben noch zu zeigen, X ist invarient, d.h. es gilt

$$X\circ\lambda_a = \lambda_a\circ X$$

für jedes $a \in k$.
Sei

$$g(T) := \lambda_a f = f(a^{-1}T).$$

Dann gilt

$$(X\circ\lambda_a)(f) = Xg$$
$$= T\cdot\frac{dg}{dT}\cdot DT$$
$$= a^{-1}T\cdot\frac{df}{dT}(a^{-1}T)\cdot DT$$
$$= (Xf)(a^{-1}T)$$
$$= (\lambda_a\circ D)(f),$$

also

$$X\circ\lambda_a = \lambda_a\circ X$$

3. <u>Schritt</u>. $X^p = X$.
Es gilt

$$XT^n = n\cdot T^n$$
$$X^2T^n = n^2\cdot T^n$$
$$\dots$$
$$X^pT^n = n^p\cdot T^n$$

Der Primkörper von k ist von der Ordung p, seine mulplikative Gruppe ist zyklisch von der Ordnung p-1, d.h. es es in $n^{p-1} = 1$ in k. Damit gilt

$$X^p T^n = n\cdot T^n = XT^n.$$

Weil X linear ist über k, ist auch X^p linear über k, d.h. es gilt

$$X^p(f) = X(f) \text{ für jedes } f \in k[T,T^{-1}],$$

also

$$X^p = X.$$

QED.

4.4.10 Beispiel 3: allgemeine lineare Gruppe 73

Sei $G := \mathbf{GL}_n$ die allgemeine lineare Gruppe. Der Koordinatenring von G hat die Gestalt

$$k[G] = k[T_{ij}, D^{-1} \mid i,j = 1,...,n]$$

mit

$$D := \det\begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix}$$

mit Unbestimmten T_{ij} (vgl. 2.1.4 Beispiel 3).

(i) Die k-Derivationen von k[G], die mit den Translationen

$$G \longrightarrow G,\ X \mapsto A\cdot X,$$

$A \in GL_n$ kommutieren, sind von der Gestalt

$$D_X: k[G] \longrightarrow k[G]$$

mit $X = (x_{ij}) \in \mathbf{gl}_n$ und

$$D_X(T_{ij}) = -\sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha} x_{\alpha j}.$$

Dabei bezeichne

$$\mathbf{gl}_n$$

die Lie-Algebra der n×n-Matrizen mit Einträgen aus k mit der Lie-Klammer

$$[X,Y] := X\cdot Y - Y\cdot X$$

und im Fall einer Charakteristik p > 0 des Grundkörpers k mit der p-Operation

$$X^{[p]} := X^p$$

(p-te Potenz der Matrix X).

<u>Ergänzung</u>: Jedes $D \in \mathcal{D}_G = \mathrm{Der}_k(k[G], k[G])$ hat die Gestalt

$$D = \sum_{u,v=1}^{n} D(T_{uv})\cdot\frac{\partial}{\partial T_{uv}},$$

also jedes $D \in L(G)$ von der Gestalt

$$D_X = -\sum_{u,v,\ell=1}^{n} T_{u\ell}\cdot x_{\ell v}\cdot\frac{\partial}{\partial T_{uv}} \text{ mit } X = (x_{ij}) \in \mathbf{gl}_n$$

(ii) Die Abbildung

$$\mathbf{gl}_n \longrightarrow L(G),\ X \mapsto D_X,$$

ist ein Isomorphismus von Lie-Algebren über k, welcher im Fall einer positiven Charakteristik des Grundkörpers die p-Operationen respektiert.

(iii) Für $x \in \mathbf{GL}_n$ und $X \in \mathbf{gl}_n$ gilt, wenn wir mit Hilfe des Isomorphismus von (ii) L(G) mit $\mathbf{gl}_n$ identifizieren,

$$\mathrm{Ad}(x)X = xXx^{-1}.$$

Genauer, es besteht ein kommutatives Diagramm von k-linearen Isomorphismen

$$\begin{tikzcd}
& L(G) \arrow[rr, equal] \arrow[dl, "\cong"', "\alpha_G"] & & L(G) \\
T_eG \arrow[rr, "di_e", "\cong"'] & & T_e\mathbb{A}^{n^2}=\mathbf{gl}_n \arrow[ur, "\cong", "\varphi"'] & \\
T_eG \arrow[u, "\mathrm{Ad}\,a", "\cong"'] \arrow[rr, "di_e", "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"', "\alpha_G"] & & T_e\mathbb{A}^{n^2}=\mathbf{gl}_n \arrow[u, "\cong", "\sigma_a"'] & \\
& L(G) \arrow[rr, equal] & & L(G) \arrow[ul, "\cong"', "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

Dabei seien

$di_e: T_e\mathbf{GL}_n \xrightarrow{\cong} T_e k^{n^2} \xrightarrow{\cong} \mathbf{gl}_n$ das Differential der natürlichen Einbettung

$$i{:}\mathbf{GL}_n \hookrightarrow k^{n^2} = \mathbf{gl}_n$$

der offenen Teilmenge GL_n des k-Vektorraums $\mathbf{gl}_n$ in diesen Vektorraum.

α_G: $L(G) \longrightarrow T_eG$, $D \mapsto D_e$ der Isomorphismus von 4.4.5 (i),

φ: $\mathbf{gl}_n \longrightarrow L(G)$, $X \mapsto D_X$, der Isomorphismus von (ii).

σ_a: $\mathbf{gl}_n \longrightarrow \mathbf{gl}_n$, $x \mapsto axa^{-1}$, die Konjugation mit $a \in \mathbf{gl}_n$

Ad a: $T_eG \longrightarrow T_eG$, das Differential von σ_a (vgl. 4.4.1B).

Der Isomorphismuse di_e hat die Abbildungsvorschrift

$$di_e: T_e\mathbf{GL}_n \xrightarrow{\cong} \mathbf{gl}_n\ ,\ D \mapsto (D(T_{ij}))_{i,j=1,...,n},$$

wenn $T_{ij} \in k[G]$ die reguläre Funktion ist, die jede Matrix auf deren Eintrag in der Position (i,j) abbildet.

(iv) Für jede abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq \mathbf{GL}_n$ identifiziert der Isomorphismus von (ii) die Lie-Algebra L(H) mit einer Lie-Teilalgebra von $\mathbf{gl}_n$.

Beweis.

1. Schritt. Bezeichnungen.

Wir setzen

$$T := (T_{ij}) := \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} := (\frac{\partial}{\partial T_{ij}}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial T_{11}} \cdots \frac{\partial}{\partial T_{1n}} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \frac{\partial}{\partial T_{n1}} \cdots \frac{\partial}{\partial T_{nn}} \end{pmatrix}$$

Für u, v = 1,..., n sei

$$D_{uv} := - \sum_{\alpha=1}^{n} T_{\alpha u} \bullet \frac{\partial}{\partial T_{\alpha v}}$$

Unter Verwendung des Standard-Skalarprodukts kann man D_{ij} auch in der folgenden Gestalt schreiben

$$D_{uv} = - <(T_{1u}, ..., T_{nu}) , \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial T_{1v}} \\ \cdots \\ \frac{\partial}{\partial T_{nv}} \end{pmatrix} > = - < (T\bullet e_u), (\frac{\partial}{\partial T}\bullet e_v) >,$$

Mit anderen Worten, D_{uv} ist das Matrizen-Produkt des Transponierten der u-ten Spalte $T\bullet e_u$ von T mit der v-ten Spalte $\frac{\partial}{\partial T}\bullet e_v$ von $\frac{\partial}{\partial T}$, d.h.

$$D_{uv} = -{}^t(T\bullet e_u)\bullet(\frac{\partial}{\partial T}\bullet e_v), \tag{1}$$

wenn wir mit ${}^tX$ die zu einer Matrix X transponierte Matrix bezeichnen. Es gilt

$$D_{uv}(T_{ij}) \qquad = -{}^t(T\bullet e_u)\bullet(\frac{\partial T_{ij}}{\partial T}\bullet e_v) = -{}^te_u\bullet {}^tT\bullet(E_{ij}\bullet e_v).$$

Dabei bezeichne E_{ij} die n×n-Matrix, deren einziger von Null verschiedener Eintrag sich in der Position (i,j) befindet und gleich 1 ist. Das Produkt ${}^tT\bullet E_{ij}$ ist eine Matrix, deren einzige von Null verschiedene Spalte die j-te Spalte ist und deren j-te Spalte gleich

$${}^tT\bullet e_i = \begin{pmatrix} T_{i1} \\ \cdots \\ T_{in} \end{pmatrix}$$

ist,

$${}^tT\bullet E_{ij} = (0,...,0, {}^tT\bullet e_i,0, ... ,0) = \sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha}\bullet E_{\alpha j}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} D_{uv}(T_{uv}) \qquad &= -{}^te_u\bullet \sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha}\bullet E_{\alpha j}\bullet e_v \\ &= - \sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha}\bullet({}^te_u\bullet E_{\alpha j}\bullet e_v) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha}\bullet(\delta_{\alpha u}\bullet\delta_{jv}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha} \bullet x_{\alpha j} \qquad \text{mit } x_{\alpha j} = \delta_{\alpha u} \bullet \delta_{jv}$$
$$= D_X(T_{ij})$$

wenn $X = (x_{ij})$ die Matrix mit $x_{ij} = \delta_{iu} \bullet \delta_{jv}$ bezeichnet, d.h. $X = E_{uv}$. Es gilt also

$$D_{uv}(T_{ij}) = D_{E_{uv}}(T_{ij}) \tag{2}$$

für alle $i,j,u,v \in \{1,...,n\}$

2. Schritt. Die Elemente von $\mathcal{D}_G := \mathrm{Der}_k(k[G], k[G])$

(a) Jede k-Derivation $D: k[G] \longrightarrow k[G]$ ist eine Linearkombination der k-Derivationen

$$\frac{\partial}{\partial T_{ij}}$$

mit Koeffizienten aus k[G], d.h.

$$D = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(T) \bullet \frac{\partial}{\partial T_{ij}} \text{ mit } f_{ij}(T) \in k[G] = k[T_{ij}, D^{-1} \mid i,j = 1,...,n] \tag{3}$$

(b) Die Derivation (3) ist durch die regulären Funktionen

$$f_{ij}(T) \in k[G]$$

eindeutit festgelegt.

(c) Für jede Wahl von regulären Funktionen $f_{ij}(T) \in k[G]$ ist durch (3) eine k-Derivation $D: k[G] \longrightarrow k[G]$ definiert.

Zu (b) und (c). Weil

$$\mathcal{D}_G := \mathrm{Der}_k(k[G], k[G]) = \mathrm{Hom}_k(\Omega_{k[G]/k}, k[G])$$

ein k[G]-Modul ist, ist jede k[G]-Linearkombination von Elementen von $\mathcal{D}_G$ ein Element von $\mathcal{D}_G$. Das gilt insbesondere für die Linearkombinationen der der

$$\frac{\partial}{\partial T_{ij}} \in \mathcal{D}_G.$$

Damit gilt (c). Eine Linearkombination der $\frac{\partial}{\partial T_{ij}}$ ist trivialerweise durch deren Koeffizienten festgelegt, d.h. es gilt (b).

Zu (a). Sei $D: k[G] \longrightarrow k[G]$ eine k-Derivation. Für jedes Potenzprodukt

$$p = \prod_{i,j=1}^{n} T_{ij}^{\alpha_{ij}} \in k[T_{ij} \mid i,j = 1,...,n] \subseteq k[G]$$

gilt nach der Produktregel

$$D(p) \qquad = D\Big(\prod_{i,j=1}^{n} T_{ij}^{\alpha_{ij}}\Big)$$

$$= \sum_{u,v=1}^{n} \Big(\prod_{i,j=1}^{n} T_{ij}^{\alpha_{ij}} / T_{uv}^{\alpha_{uv}} \Big) \cdot D(T_{uv}^{\alpha_{uv}})$$

$$= \sum_{u,v=1}^{n} (\alpha_{uv}-1) \cdot T_{uv}^{\alpha_{uv}-1} \Big(\prod_{i,j=1}^{n} T_{ij}^{\alpha_{ij}} / T_{uv}^{\alpha_{uv}} \Big) \cdot D(T_{uv})$$

$$= \sum_{u,v=1}^{n} \frac{\partial T_{uv}^{\alpha_{uv}}}{\partial T_{uv}} \cdot \Big(\prod_{i,j=1}^{n} T_{ij}^{\alpha_{ij}} / T_{uv}^{\alpha_{uv}} \Big) \cdot D(T_{uv})$$

$$= \sum_{u,v=1}^{n} \frac{\partial}{\partial T_{uv}} \cdot \Big(\prod_{i,j=1}^{n} T_{ij}^{\alpha_{ij}} \Big) \cdot D(T_{uv})$$

also

$$D(p) = \sum_{u,v=1}^{n} D(T_{uv}) \cdot \frac{\partial}{\partial T_{uv}} (p).$$

Weil D als k-Derivation eine k-linere Abbildung ist, besteht diese letzte Identität für jedes Polynom $p \in k[k[T_{ij} \mid i,j = 1,...,n]]$. Weil sich jede k-Derivation

$$k[k[T_{ij} \mid i,j = 1,...,n]] \longrightarrow k[G]$$

auf genau eine Weise zu einer k-Derivation

$$k[G] \longrightarrow k[G]$$

forsetzen läßt (nach Bemerkung 4.1.1A (v)), gilt die Identität sogar für jede reguläre Funktion $p \in k[G]$, d.h. es gilt

$$D = \sum_{u,v=1}^{n} D(T_{uv}) \cdot \frac{\partial}{\partial T_{uv}} \tag{4}$$

mit $D(T_{uv}) \in k[G]$.

3. Schritt. $D_{uv} \in L(G)$.

Nach dem zweiten Schritt ist die Linearkombination $D_{uv} := - \sum_{\alpha=1}^{n} T_{\alpha u} \cdot \frac{\partial}{\partial T_{\alpha v}}$ ein Element von $\mathcal{D}_G$. Wir haben noch zu zeigen, D_{uv} ist invariant gegenüber linken Translationen, d.h. es gilt

$$D_{uv} \circ \lambda(A)^{-1} = \lambda(A)^{-1} \circ D_{uv}$$

für jede Matrix $A \in G$, d.h. für $f(T) \in k[G]$ und $A \in G$ gilt

$$D_{uv}(f(AT)) = D_{uv}(f(T))\,(AT).$$

Es gilt

$$D_{uv}(f(AT)) = -{}^{t}(T \cdot e_u) \cdot \Big(\frac{\partial f(AT)}{\partial T} \cdot e_v\Big) \qquad \text{(nach (1))}$$

Wenn wir mit $(X)_{ij}$ den Eintrag der Matrix X in der Position (i,j) bezeichnen, so gilt

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f(AT)}{\partial T}\right)_{ij} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial T_{\alpha\beta}}(AT)\bullet\frac{\partial (AT)_{\alpha\beta}}{\partial T_{ij}} \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial T_{\alpha\beta}}(AT)\bullet\frac{\partial}{\partial T_{ij}} \sum_{\gamma=1}^{n} (A)_{\alpha\gamma}\bullet T_{\gamma\beta} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial T_{\alpha j}}(AT)\bullet(A)_{\alpha i} \\
&= ({}^{t}A\bullet \frac{\partial f}{\partial T})_{ij}(AT)
\end{aligned}
$$

also

$$
\frac{\partial f(AT)}{\partial T} = {}^{t}A\bullet \frac{\partial f}{\partial T}(AT).
$$

Wir setzen ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
D_{uv}(f(AT)) &= -{}^{t}(T\bullet e_u)\bullet({}^{t}A\bullet \frac{\partial f}{\partial T}(AT)\bullet e_v) \\
&= -{}^{t}(AT\bullet e_u)\bullet(\frac{\partial f}{\partial T}(AT)\bullet e_v) \\
&= (-{}^{t}(T\bullet e_u)\bullet(\frac{\partial f}{\partial T}\bullet e_v))|_{AT} && \text{(T ist durch AT zu ersetzen)} \\
&= (D_{uv}(f(T))|_{AT} && \text{(nach (1)} \\
&= (D_{uv}(f(T))\ (AT)
\end{aligned}
$$

Wir haben gezeigt, D_{uv} ist linksinvariant, liegt also in L(G).

4. <u>Schritt</u>. die D_X definieren Elemente von L(G)

Für jede n×n-Matrix $X = (x_{ij})$ mit Einträgen aus k gibt es genau ein $D \in \mathcal{D}_G$ mit

$$
D(T_{ij}) = D_X(T_{ij}) \text{ für } i,j = 1,...,n.
$$

Es gilt

$$
D = \sum_{u,v=1}^{n} x_{uv}\bullet D_{uv}
$$

Insbesondere liegt D in L(G). Wir werden für dieses D die Bezeichnung D_X verwenden.

Nach dem zweiten Schritt ist jedes $D \in \mathcal{D}_G$ durch dessen Werte $D(T_{ij})$ in den T_{ij} eindeutig bestimmt (vgl. (4)). Es reicht zu zeigen, für

$$
X = (x_{ij}) = \sum_{u,v=1}^{n} x_{uv}\bullet E_{uv}
$$

gilt

$$
\left(\sum_{u,v=1}^{n} x_{uv}\bullet D_{uv}\right)(T_{ij}) = D_X(T_{ij}) \tag{5}
$$

denn dann ist

$$
D := \sum_{u,v=1}^{n} x_{uv}\bullet D_{uv}
$$

ein Element von $\mathcal{D}_G$ mit $D(T_{ij}) = D_X(T_{ij})$ für alle i und j, welches nach dem dritten Schritt in L(G) liegt (denn L(G) ist ein k-Vektorraum). Nach Definition von D_X ist (5) äquivalent zu

$$(\sum_{u,v=1}^{n} x_{uv}\bullet D_{uv})(T_{ij}) = - \sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha}x_{\alpha j}$$

Beide Seiten der behaupteten Identität sind linear in den $x_{ij} \in k$, d.h. sie hängen linear von der Matrx $X = (x_{ij})$ ab. Da jede n×n-Matrix mit Einträgena aus k eine k-Linearkombination der Elementarmatrizen E_{uv} ist, können wir zum Beweis von (5) annehmen, $X = E_{uv}$. Es reicht also zu zeigen,

$$D_{uv}(T_{ij}) = D_{E_{uv}}(T_{ij})$$

Nach dem ersten Schritt besteht diese Identität (vgl. (2)). Damit ist die Ausage des vierten Schritts bewiesen.

5.Schritt. Beweis von (i) und (ii)

Die Abbildung

$$\varphi:\mathbf{gl}_n \longrightarrow L(G),\ X \mapsto D_X$$

ist ein Isomorphismus von Lie-Algebren über k und respektiert im Fall einer positiven Charakteristik p des Grundkörpers k die p-Operation.

Nach dem vierten Schritt ist die Abbildung wohldefiniert (d.h. D_X ist ein Element von L(G)). Ebenfalls nach dem vierten Schritt ist φ eine k-lineare Abbildung. Für

$$X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$

gilt

$$0 = \varphi(X)(T_{ij}) = D_X(T_{ij}) = - \sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha}x_{\alpha j}$$

für i,j = 1,...,n, also X = 0. Die Abbildung φ ist injektiv. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\dim_k L(G) &= \dim G && \text{(nach 4.4.6)}\\ &= \dim \mathbf{GL}_n && \text{(wegen } G = GL_n\text{)}\\ &=^{27} \dim \mathbb{A}^{n^2}\\ &= n^2\\ &= \dim_k \mathbf{gl}_n\end{aligned}$$

Als injektive k-lineare Abbildung zwischen k-Vektorräumen derselben (endlichen) Dimension ist φ ein k-linearer Isomorphismus. Wir haben noch zu zeigen

[27] $\mathbf{GL}_n$ ist nicht-leere offene Teilmenge der irrduziblen Varietät $\mathbb{A}^{n^2}$. Deshalb gilt

$$k(\mathbf{GL}_n) = k(\mathbb{A}^{n^2})$$

also

$$\dim \mathbf{GL}_n = \mathrm{tr.deg}_k\, k(\mathbf{GL}_n) = \mathrm{tr.deg}_k\, k(\mathbb{A}^{n^2}) = \dim \mathbb{A}^{n^2}$$

$$\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$$

und im Fall einer positiven Charakteristik p des Grundkörpers

$$\phi(X^p) = (\varphi(X)^p)$$

Es gilt mit $X = (x_{ij})$ und $Y = (y_{ij})$:

$$\begin{aligned}
[\varphi(X), \varphi(Y)](T_{ij}) &= [D_X, D_Y](T_{ij}) \\
&= (D_X \circ D_Y - D_Y \circ D_X)(T_{ij}) \\
&= D_X(D_Y(T_{ij})) - D_Y(D_X(T_{ij})) \\
&= -(D_X(\sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha} y_{\alpha j}) - D_Y(\sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha} x_{\alpha j})) \\
&= -(\sum_{\alpha=1}^{n} D_X(T_{i\alpha}) \bullet y_{\alpha j}) - \sum_{\alpha=1}^{n} D_Y(T_{i\alpha}) \bullet x_{\alpha j}) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} (\sum_{\beta=1}^{n} T_{i\beta} \bullet x_{\beta\alpha}) \bullet y_{\alpha j}) - \sum_{\alpha=1}^{n} (\sum_{\beta=1}^{n} T_{i\beta} \bullet y_{\beta\alpha}) \bullet x_{\alpha j}) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} T_{i\beta} \bullet (\sum_{\alpha=1}^{n} x_{\beta\alpha} \bullet y_{\alpha j}) - \sum_{\beta=1}^{n} T_{i\beta} \bullet (\sum_{\alpha=1}^{n} y_{\beta\alpha} \bullet x_{\alpha j})) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} T_{i\beta} \bullet (XY)_{\beta j} - \sum_{\beta=1}^{n} T_{i\beta} \bullet (YX)_{\beta j} \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} T_{i\beta} \bullet (XY-YX)_{\beta j} \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} T_{i\beta} \bullet ([X,Y])_{\beta j} \\
&= D_{[X,Y]}(T_{ij}) \\
&= \varphi([X,Y](T_{ij}),
\end{aligned}$$

also

$$[\varphi(X), \varphi(Y)] = \varphi([X,Y].$$

Weiter gilt im Fall einer positiven Charakteristik p des Grundkörpers k

$$\begin{aligned}
\varphi(X^p)(T_{ij}) &= D_{X^p}(T_{ij}) \\
&= \sum_{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_p=1}^{n} T_{i\alpha} x_{\alpha\beta_1} \bullet x_{\beta_1\beta_2} \bullet x_{\beta_2\beta_3} \bullet \dots \bullet x_{\beta_{p-1}\beta_p} \bullet x_{\beta_p,j} \\
&= \sum_{\beta_1,\dots,\beta_p=1}^{n} D_X(T_{i\beta_1}) \bullet x_{\beta_1\beta_2} \bullet x_{\beta_2\beta_3} \bullet \dots \bullet x_{\beta_{p-1}\beta_p} \bullet x_{\beta_p,j} \\
&= \sum_{\beta_1,\dots,\beta_p=1}^{n} D_X(T_{i\beta_1} \bullet x_{\beta_1\beta_2}) \bullet x_{\beta_2\beta_3} \bullet \dots \bullet x_{\beta_{p-1}\beta_p} \bullet x_{\beta_p,j}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\beta_2,\dots,\beta_p=1}^{n} D_X(D_X(T_{i\beta_2})\cdot x_{\beta_2\beta_3}\cdot\dots\cdot x_{\beta_{p-1}\beta_p}\cdot x_{\beta_p,j}$$

$$= \sum_{\beta_2,\dots,\beta_p=1}^{n} D_X^2(T_{i\beta_2})\cdot x_{\beta_2\beta_3}\cdot\dots\cdot x_{\beta_{p-1}\beta_p}\cdot x_{\beta_p,j}$$

...

$$= \sum_{\beta_\nu,\dots,\beta_p=1}^{n} D_X^\nu(T_{i\beta_\nu}\cdot x_{\beta_\nu\beta_{\nu+1}})\cdot x_{\beta_{\nu+1}\beta_{\nu+2}}\cdot\dots\cdot x_{\beta_{p-1}\beta_p}\cdot x_{\beta_p,j}$$

$$= \sum_{\beta_{\nu+1},\dots,\beta_p=1}^{n} D_X^\nu(D_X(T_{i\beta_{\nu+1}})\cdot x_{\beta_{\nu+1}\beta_{\nu+2}}\cdot\dots\cdot x_{\beta_{p-1}\beta_p}\cdot x_{\beta_p,j}$$

$$= \sum_{\beta_{\nu+1},\dots,\beta_p=1}^{n} D_X^{\nu+1}(T_{i\beta_{\nu+1}})\cdot x_{\beta_{\nu+1}\beta_{\nu+2}}\cdot\dots\cdot x_{\beta_{p-1}\beta_p}\cdot x_{\beta_p,j}$$

...

$$= \sum_{\beta_p=1}^{n} D_X^{p-1}(T_{i\beta_{p-1}})\cdot x_{\beta_p,j}$$

$$= \sum_{\beta_p=1}^{n} D_X^{p-1}(T_{i\beta_{p-1}}\cdot x_{\beta_p,j})$$

$$= D_X^p(T_{ij})$$

Da dies für alle i und j gilt, folgt

$$\varphi(X^p) = D_X^p = \varphi(X)^p.$$

6. Schritt. Beweis von (iiii).

Die natürliche Einbettung (affiner algebraischer Varietäten)

$$i:\mathbf{GL}_n \hookrightarrow k^{n^2} = \mathbf{gl}_n\,,\ A \mapsto A,$$

hat das Differential

$$di_e:T_e\mathbf{GL}_n = \mathrm{Der}(k[G], k_e) \longrightarrow \mathrm{Der}(k[T_{ij}, i,j=1,\dots,n], k_e) = T_e\, k^{n^2} \xrightarrow{\cong} \mathbf{gl}_n \quad (6)$$

$$X \mapsto X|_{k[T_{ij} \mid i,j = 1,\dots,n]} \mapsto (X(T_{ij}))$$

Weil k_e ein k[G]-Modul ist und k[G] ein Quotientenring von $k[T_{ij}, i,j=1,\dots,n]$, ist dieses Differential ein k-linearer Isomorphismus (nach Bemerkung 4.1.1A(v)). Jeder Tangentialvektor $X \in T_e\mathbf{GL}_n$ wird gerade auf auf die Matrix $(X(T_{ij}))$ seiner Koordinaten abgebildet.

Es gilt

$$di_e\left(\frac{\partial}{T_{uv}}\Big|_{T=e}\right)(T_{ij}) = \left(\frac{\partial}{T_{uv}}(T_{ij})\Big|_{T=e}\right) = E_{uv}$$

Bevor wir uns dem Beweis der Kommutativität der Vierecks in der Mitte zuwenden, untersuchen wir zunächst das Differential einer k-linearen Abbildung

$$f_a:\mathbf{GL}_n \longrightarrow \mathbf{GL}_n,\ x \mapsto ax,$$

mit der Matrix $a \in \mathbf{GL}_n$. Auf Grund der Abbildungsvorschrift

$$f_a(x) = ax = ((ax)_{ij}) = (\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}x_{\alpha j})$$

ist f_a ist die reguläre Abbildung mit den Koordinatenfunktionen

$$f_a^*(T_{ij}) = T_{ij}\circ f_a = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}T_{\alpha j} \tag{7}$$

Für jeden Vektor $X \in T_e\mathbf{GL}_n$ gilt

$$\begin{aligned}
(di_{f_a(e)})((df_a)_e(X)) &= (di_e)(X\circ f_a^*) && \text{(Defintion von } df_a\text{)}\\
&= ((X\circ f_a^*)(T_{ij})) && \text{(Definition von } di_e\text{)}\\
&= (X(T_{ij}\circ f_a)) && \text{(Definition von } f_a^*\text{)}\\
&= (X(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}T_{\alpha j})) && \text{(nach (7))}\\
&= (\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\, X(T_{\alpha j})) && \text{(X ist k-linear)}\\
&= a\bullet(X(T_{ij}))\\
&= f_a((X(T_{ij}))) && \text{(Definition von } f_a\text{)=}\\
&= f_a(di_e(X)). && \text{(Definition von } di_e\text{)}
\end{aligned}$$

Da dies für jedes X gilt, folgt

$$di_{f_a(e)}\circ(df_a)_e = f_a\circ di_e$$

Mit anderen Worten, das Differential der linearen Abbildung f_a mit der Matrix a entspricht beim Isomorphismus (6) gerade der Abbildung f_a selbst. Nun ist

$$\sigma_a: G \longrightarrow G,\ x \mapsto axa^{-1}$$

eine k-lineare Abbildung (bezüglich x) mit $\sigma_a(e) = e$, d.h. es gilt

$$di_e\circ(d\sigma_a)_e = \sigma_a\circ di_e.$$

Das Differential der Konjugation mit a ist aber gerade die Abbildung Ad a (vgl. 4.4.1B), d.h. es ist

$$di_e\circ \mathrm{Ad}\ a = \sigma_a\circ di_e.$$

Damit ist die Kommutativität des Vierecks in der Mitte bewiesen.
Wir haben noch die Kommutativität der beiden anderen Vierecke zu beweisen, d.h. zu zeigen, es gilt

$$di_e\circ\alpha_G\circ\varphi = \mathrm{id}.$$

Für $X = (x_{ij}) \in \mathbf{gl}_n$ gilt

$$
\begin{aligned}
((\alpha_G \circ \varphi)(X))(T_{ij}) &= \alpha_G(D_X)(T_{ij}) \\
&= (D_X(T_{ij}))(e) \\
&= (\sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha} x_{\alpha j})(e) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha}(e) x_{\alpha j} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_{i\alpha} x_{\alpha j} \\
&= x_{ij} \\
&= (\sum_{u,v=1}^{n} x_{uv} \bullet \frac{\partial}{\partial T_{uv}}\Big|_{T=e})(T_{ij}).
\end{aligned}
$$

Weil dies für jedes X gilt, folgt

$$(\alpha_G \circ \varphi)(X) = \sum_{u,v=1}^{n} x_{uv} \bullet \frac{\partial}{\partial T_{uv}}\Big|_{T=e}$$

Wir wenden di_e an (vgl. (6)) und erhalten

$$
\begin{aligned}
(di_e \circ \alpha_G \circ \varphi)(X) &= (\sum_{u,v=1}^{n} x_{uv} \bullet \frac{\partial}{\partial T_{uv}}\Big|_{T=e} (T_{ij})) \\
&= (x_{ij}) \\
&= X.
\end{aligned}
$$

Da dies für jedes $X \in gl_n$ gilt, folgt

$$di_e \circ \alpha_G \circ \varphi = id$$

(also $di_e \circ \alpha_G \circ \varphi \circ di_e = di_e$ also - weil di_e ein Isomorphismus ist -

$$\alpha_G \circ \varphi \circ di_e = id,$$

also $\alpha_G \circ \varphi \circ di_e \circ \alpha_G = \alpha_G$, also - weil α_G ein Isomorphismus ist -

$$\varphi \circ di_e \circ \alpha_G = id.)$$

7. Schritt. Beweis von (iv).
Die Aussage folgt aus der Kommutativität des Diagramms von (iii) der Funktorialität der Abbildungen α_G und di_e und der Tatsache, daß die natürliche Einbettung $H \hookrightarrow G$ einen injektiven Homomorphismus $T_e H \hookrightarrow T_e G$ von Lie-Algebren über k induziert.
QED.

4.4.11 Aufgaben 73

4.4.11 Aufgabe 1: $L(SL_n)$ 73

Die Lie-Algebra der $\mathbf{SL}_n$ ist Lie-Teilalgebra $\mathbf{sl}_n$ der $\mathbf{gl}_n$ der Matrizen der Spur 0.
Hinweis: Verwenden Sie 4.4.7.
Beweis. Nach Definition ist

$$\mathbf{SL}_n = V(\det(T_{ij}) - 1) \subseteq k[T] := k[T_{ij} \mid i,j = 1,...,n]$$

also

$$I(\mathbf{SL}_n) = \sqrt{(\det(T_{ij})-1)\bullet k[T]}.$$

Am Anfang des Beweises von 2.1.5 Aufgabe 3 wird gezeigt, daß $\det(T_{ij})-1$ irreduzibel ist. Deshalb ist

$$(\det(T_{ij})-1)\bullet k[T]$$

ein Primideal und es gilt

$$I(\mathbf{SL}_n) = (\det(T_{ij})-1)\bullet k[T].$$

Für $D \in \mathcal{D}_{G,H} \cap L(G)$ mit $G = \mathbf{GL}_n$ und $H = \mathbf{SL}_n$ gilt (nach Definition von $\mathcal{D}_{G,H}$)

$$D(\det(T_{ij})-1) \in (\det(T_{ij})-1)\bullet k[T],$$

also

$$\begin{aligned} 0 &= D(\det(T_{ij})-1)(e) \\ &= D(\det(T_{ij}))(e) \\ &= D(\det(T_1,...,T_n))(e) \end{aligned}$$

wenn T_i die i-te Spalte der Matrix $T = (T_{ij})$ bezeichnet. Zusammen mit der Ergänzung von 4.4.10 Beispiel 3 (i) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(\sum_{u,v=1}^{n} \frac{\partial\det(T)}{\partial T_{uv}} \bullet D(T_{uv})\Big)(e) \\ &= \Big(\sum_{u,v=1}^{n} \frac{\partial\det(T)}{\partial T_{uv}} \bullet D(T_{uv})\Big)(e) \\ &= \Big(\sum_{u,v=1}^{n} \det(T_1,..., T_{v-1}, \frac{\partial T_v}{\partial T_{uv}}, T_{v-1},...,T_n) \bullet D(T_{uv})\Big)(e) \\ &= \sum_{u,v=1}^{n} \det(e_1,..., e_{v-1}, e_u, e_{v-1},...,e_n) \bullet D(T_{uv})(e) \\ &= \sum_{u,v=1}^{n} \delta_{uv} \bullet D(T_{uv})(e) \\ &= \sum_{u,v=1}^{n} \delta_{uv} \bullet D(T_{uv})(e) \\ &= \sum_{u=1}^{n} D(T_{uu})(e), \end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$\sum_{u=1}^{n} D(T_{uu})(e) = 0 \text{ für } D \in \mathcal{D}_{G,H} \cap L(G).$$

Sei jetzt $X \in T_eH \hookrightarrow T_e\mathbf{GL}_n = T_e\mathbb{A}^{n^2} = \mathbf{gl}_n$. Wir wenden den Lie-Algebra-Isomorphismus

$$\varphi:\mathbf{gl}_n \longrightarrow L(\mathbf{Gl}_n)$$

von 4.4.10 Beispiel 3 an und erhalten ein Element

$$\varphi(X) = D_X \in L(\mathbf{Gl}_n)$$

Auf Grund des kommutativen Diagramms von 4.4.10 Beispiel 3 (iii) gilt

$$di_e(\alpha_G(\varphi(X))) = X \in T_eH.$$

(mit $i:G \hookrightarrow \mathbb{A}^{n^2}$ wie in 4.4.10).Bezeichne $j: H \hookrightarrow G$ die natürliche Einbettung, so ist das Diagramm von k-linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \overset{di_e}{\hookrightarrow} & \mathbf{gl}_n \\ dj_e \uparrow & & \uparrow d(ij)_e \\ T_eH & = & T_eH \end{array}$$

kommutativ (nach Bemerkung 4.1.3(ii)), wobei alle Abbildungen injektiv sind (nach 4.1.9 Aufgabe 4). Weil X im Bild der rechten vertikalen Abbildung liegt, liegt damit $\alpha_G(\varphi(X))$ im Bild der linken vertikalen Abbildung. Wir erhalten

$$\alpha_G(\varphi(X)) \in T_eH$$

also

$$D_X = \varphi(X) \in L(H).$$

Nach 4.4.7 C gibt es ein $D \in \mathcal{D}_{G,H} \cap L(G)$ mit

$$D_X(f|_H) = D(f)|_H \text{ für jedes } f \in k[G].$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{u=1}^{n} D(T_{uu})(e) \\ &= \sum_{u=1}^{n} D(T_{uu})|_H (e) \\ &= \sum_{u=1}^{n} \varphi(X)(T_{uu})(e) \\ &= \alpha_G\Big(\sum_{u=1}^{n} \varphi(X)(T_{uu})\Big) \end{aligned}$$

wenn α_G den Isomorphismus von 4.4.5 (i) bezeichnet. Wir wenden den Isomorphismus di_e des kommutativen Diagramms von 4.4.10 (ii) an und erhalten

$$0 = \sum_{u=1}^{n} ((di_e \circ \alpha_G \circ \varphi)(X))(T_{uu})$$

Wegen der Kommutativität dieses Diagramms gilt $di_e \circ \alpha_G \circ \varphi = id$, also

$$0 = \sum_{u=1}^{n} X(T_{uu})$$

d.h. die Spur des Tangentialvektors X ist Null. Wir haben gezeigt

$$T_e\mathbf{SL}_n \subseteq \mathbf{sl}_n.$$

(genauer, das Bild des Differentials der natürlichen Einbettung $\mathbf{SL}_n \hookrightarrow \mathbf{GL}_n \hookrightarrow \mathbb{A}^{n^2}$ liegt in $\mathbf{sl}_n$).

Bemerkung.

Mit etwas mehr algebraischer Geometrie könnte man jetzt wie folgt argumentieren: Nach Definition ist $\mathbf{SL}_n$ eine Hyperfläche in der $\mathbf{GL}_n$, hat also eine um 1 kleinere Dimension als die $\mathbf{GL}_n$. Es gilt

$$\dim_k T_e\mathbf{SL}_n = \dim \mathbf{SL}_n = \dim \mathbf{GL}_n - 1 = n^2 - 1 = \dim_k \mathbf{sl}_n,$$

also

$$T_e\mathbf{SL}_n = \mathbf{sl}_n.$$

Da wir dieses Dimensionsargument nicht zur Verfügung haben, müssen wir die umgekehrte Inklusion expliziet beweisen.

Sei

$$X \in \mathbf{sl}_n \subseteq \mathbf{gl}_n.$$

eine Matrix mit der Spur Null. Auf Grund der Isomorphismen

$$\alpha_G: L(G) \xrightarrow{\cong} T_eG \text{ und } di_e: T_eG \xrightarrow{\cong} \mathbf{gl}_n$$

können wir X in der Gestalt

$$X = di_e(\alpha_G(D)) \text{ mit } D \in L(G)$$

schreiben. Es gilt

$$\begin{aligned} D(\det(T_{ij}) - 1) &= D(\det(T_{ij})) \\ &= D(\det(T_1,\dots,T_n)) \\ &= \sum_{u=1}^{n} \det(T_1,\dots,T_{u-1},D(T_u),T_{u+1},\dots T_n). \end{aligned}$$

Dabei bezeichne $D(T_u)$ den Spaltenvektor, den man aus dem Spaltenvektor T_u von T durch Anwenden von D auf jede Koordinate von T_u erhält. Es folgt

$$\begin{aligned} D(\det(T_{ij}) - 1)(e) &= \sum_{u=1}^{n} \det(e_1,\dots,e_{u-1},D(T_u)(e),e_{u+1},\dots,e_n) \\ &=^{28} \sum_{u=1}^{n} \det(e_1,\dots,e_{u-1},D(T_{uu})(e)\bullet e_u,e_{u+1},\dots,e_n) \end{aligned}$$

[28] Indem wir geeignete Vielfache der anderen Spalten von der Spalte $D(T_u)(e)$ abziehen, erreichen wir, daß alle Koordinaten außer eventuell der u-ten gleich Null werden.

$$
\begin{aligned}
&=^{29} \sum_{u=1}^{n} D(T_{uu})(e) \\
&= \sum_{u=1}^{n} \alpha_G(D)(T_{uu}) && \text{(nach Definition von } \alpha_G\text{)} \\
&= (di_e)^{-1}\Big(\sum_{u=1}^{n} X(T_{uu})\Big) && \text{(nach Wahl von D)} \\
&= (di_e)^{-1}(0) && \text{(weil die Spur von X gleich 0 ist).} \\
&= 0 && \text{(mit } di_e \text{ ist } (di_e)^{-1} \text{ k-linear).}
\end{aligned}
$$

Es gilt also

$$D_e(d-1) = 0 \text{ für } d := \det(T_{ij})$$

Weil D invariant ist, gilt nach Bemerkung 4.4.3I (iv)

$$D_g = (dL_g)_e(D_e) \text{ für beliebige } g \in G,$$

also mit $T = (T_{ij})$

$$
\begin{aligned}
D_g(\det(T)) &= (dL_g)_e(D_e)(\det(T)) \\
&= D_e(L_g^*(\det(T))) \\
&= D_e(\det(gT)) \\
&= D_e(\det(g)\bullet\det(T)) \\
&= \det(g)\bullet D_e(\det(T)) \quad (D_e \text{ ist k-linear})
\end{aligned}
$$

Weil D_g und D_e beide k-Derivationen sind, folgt

$$
\begin{aligned}
D_g(d-1) &= \det(g)\bullet D_e(d-1) \\
&= \det(g)\bullet 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

für jedes $g \in G$, d.h.

$$D(d-1)(g) =^{30} 0 \text{ für } g \in G,$$

also

$$D(d-1) = 0 \in I(H).$$

Jedes $f \in I(H) = (d-1)\bullet k[G]$ hat die Gestalt $f = a\bullet(d-1)$ mit $a \in k[G]$. Deshalb gilt

$$
\begin{aligned}
D(f) &= D(a\bullet(d-1)) \\
&= a\bullet D(d-1) + (d-1)\bullet D(a) \\
&= (d-1)\bullet D(a) \qquad \text{(wegen } D(d-1) = 0\text{)} \\
&\in I(H)
\end{aligned}
$$

für jedes $f \in I(H)$. Wir haben gezeigt

$$D(I(H)) \subseteq I(H),$$

---

[29] $D(T_{uu})(e)$ ist das Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonalen.

[30] Die reguläre Funktion det(T) ist konstant gleich 1 in den Punkten von $\mathbf{SL}_2$. Also ist

$$\det(gT) = \det(g)\bullet\det(T)$$

konstant gleich det(g) in den Punkten von $\mathbf{SL}_2$.

d.h.

$$D \in \mathcal{D}_{G,H} \cap L(G).$$

Sei $\tilde{D} \in L(H)$ das Bild von D beim Isomorphismus ϕ': $\mathcal{D}_{G,H} \cap L(G) \xrightarrow{\cong} L(H)$ von 4.4.7C. Auf Grund der Kommutativität des Diagramms von 4.4.7C gilt

$$(dj_e)(\alpha_H(\tilde{D})) = \alpha_G(D)$$

wenn j: $H \hookrightarrow G$ die natürliche Einbettung bezeichnet. Damit gilt nach Wahl von D

$$X = (di_e)(\alpha_G(D)) = (di_e)((dj_e)(\alpha_H(\tilde{D}))) = d(i\circ j)_e(\alpha_H(\tilde{D}))$$

also

$$X \in d(i\circ j)_e(\alpha_H(L(H)))$$
$$= d(i\circ j)_e(T_eH) \qquad (\alpha_H \text{ ist ein Isomorphismus } L(H) \longrightarrow T_eH).$$

Damit liegt X im Bild des Differentials

$$d(i\circ j)_e: T_eH \longrightarrow \mathbf{gl}_n$$

der natürlichen Einbettung $i\circ j$: $H \overset{j}{\hookrightarrow} G \overset{i}{\longrightarrow} \mathbb{A}^{n^2}$. Da dies für jedes $X \in \mathbf{sl}_n$ gilt

$$\mathbf{sl}_n \subseteq \mathrm{Im}(d(i\circ j)_e,$$

oder, wenn wir den Tangentialraum T_eH mit seinem Bild in $\mathbf{gl}_n$ identifizieren,

$$\mathbf{sl}_n \subseteq T_eH.$$

In der oben bewiesenen Inklusion $T_eH \subseteq \mathbf{sl}_n$ gilt also das Gleichheitszeichen,
QED.

4.4.11 Aufgabe 2: $L(D_n),L(T_n),L(U_n)$ *73*

Bestimmen Sie die Lie-Algebren der Gruppe $\mathbf{D}_n$, $\mathbf{T}_n$, $\mathbf{U}_n$ von 2.1.5.

Beweis. 1. Schritt. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{A}^n$ bilden die Derivationen

$$\frac{\partial}{\partial T_1}\Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial T_n}\Big|_x \in T_x\mathbb{A}^n = \mathrm{Der}_k(k[T_1,\dots,T_n], k_x)$$

eine k-Vektorraumbasis des Tangentialraums $T_x\mathbb{A}^n$. Für jedes $D \in T_x\mathbb{A}^n$ und jedes $f \in k[T_1,\dots,T_n]$ gilt

$$D(f) = \sum_{i=1}^{n} D(T_i)\cdot\frac{\partial f}{\partial T_i}\Big|_x \qquad (1)$$

Sei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Beide Seiten von (1) sind k-lineare bezüglich f. Es reicht also (1) für den Spezialfall

$$f = \prod_{i=1}^{n} T_i^{\alpha_i}$$

mit nicht-negativen ganzen Zahlen α_i zu beweisen. Es gilt

Nach der Produktregel gilt dann für jedes $D \in T_x\mathbb{A}^n$:

$$D(\prod_{i=1}^n T_i^{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^n x_1^{\alpha_1}\bullet\ldots\bullet x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}\bullet D(T_i^{\alpha_i})\bullet x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\bullet\ldots\bullet x_n^{\alpha_n}$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_1^{\alpha_1}\bullet\ldots\bullet x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}\bullet\alpha_i\bullet x_i^{\alpha_i-1}\bullet D(T_i)\bullet x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\bullet\ldots\bullet x_n^{\alpha_n}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_1^{\alpha_1}\bullet\ldots\bullet x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}\bullet\frac{\partial T_i^{\alpha_i}}{\partial T_i}\Big|_x\bullet x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\bullet\ldots\bullet x_n^{\alpha_n}\bullet D(T_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n D(T_i)\bullet\frac{\partial}{T_i}(\prod_{i=1}^n T_i^{\alpha_i})|_x$$

Damit gilt (1). Insbesondere bilden die $\frac{\partial}{\partial T_i}|_x$ ein Erzeugendensystem des Tangentialraums. Wir haben noch ihre lineare Unahängigkeit über k zu beweisen. Seien

$$c_1,\ldots,c_n \in k$$

Konstanten mit

$$\sum_{i=1}^n c_i\bullet\frac{\partial}{\partial T_i}|_x = 0.$$

Wir wenden die linke Seite auf T_j an und erhalten $c_j = 0$. Da dies für jedes j gilt, ist damit die lineare Unabhängigkeit der $\frac{\partial}{\partial T_i}|_x$ bewiesen.

2. <u>Schritt</u>. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät und $x \in X$ ein Punkt. Dann ist

$$T_xX$$

der lineare Unterraum von $T_x\mathbb{A}^n = \sum_{i=1}^n k\bullet \frac{\partial}{\partial T_i}|_x$ der von den Vektoren

$$\sum_{i=1}^n c_i\bullet \frac{\partial}{\partial T_i}|_x$$

erzeugt wird mit

$$\sum_{i=1}^n c_i\bullet \frac{\partial f}{\partial T_i}|_x = 0 \text{ für jedes } f \in I(X)$$

Nach 4.4.7B gilt $D(I(X)) = 0$ für jedes $D \in T_xX$. Weil T_xX von den $\frac{\partial}{\partial T_i}|_x$ erzeugt wird, hat D die Gestalt

$$D = \sum_{i=1}^n c_i\bullet \frac{\partial}{\partial T_i}|_x \text{ mit } c_i \in k,$$

und für $f \in I(X)$ gilt

$$0 = D(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \bullet \frac{\partial f}{\partial T_i}|_x .$$

Ist umgekehrt

$$D = \sum_{i=1}^{n} c_i \bullet \frac{\partial}{\partial T_i}|_x \text{ mit } c_i \in k$$

identisch Null auf I(X), so liegt D nach 4.4.7B in $T_x X$

3. Schritt. Im Fall $G = \mathbf{D}_n = \{(x_{ij}) \mid x_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j\}$ besteht $T_e \mathbf{D}_n$ aus den Diagonalmatrizen von $\mathbf{gl}_n$.

Wegen $G = V(T_{ij} \mid i \neq j)$ besteht $T_e G$ aus allen

$$D = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \bullet \frac{\partial}{\partial T_{ij}}|_e$$

mit $D(T_{ij}) = 0$ für $i \neq j$, d.h. mit $c_{ij} = 0$ für $i \neq j$, d.h. aus den

$$D = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \bullet \frac{\partial}{\partial T_{ii}}|_e$$

Wir identifizieren $T_e \mathbf{GL}_n$ mit $\mathbf{gl}_n$ vermittels des k-linearen Isomorphismus[31]

$$T_e \mathbf{GL}_n \xrightarrow{\cong} \mathbf{gl}_n ,\ \frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e \mapsto = E_{uv} = (\frac{\partial T_{ij}}{\partial T_{uv}}|_e),$$

und identifizien auf diese Weise

$$T_e \mathbf{D}_n \xrightarrow{\cong} \mathbf{d}_n$$

mit den Diagonal-Matrizen von $\mathbf{gl}_n$.

4. Schritt. Im Fall $G = \mathbf{T}_n = \{(x_{ij}) \mid x_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}$ besteht $T_e \mathbf{T}_n$ aus den oberen Dreiecksmatrizen von $\mathbf{gl}_n$.

Wegen $G = V(T_{ij} \mid i \neq j)$ besteht $T_e G$ aus allen

$$D = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \bullet \frac{\partial}{\partial T_{ij}}|_e$$

mit $D(T_{ij}) = 0$ für $i > j$, d.h. mit $c_{ij} = 0$ für $i > j$, d.h. aus den

$$D = \sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ij} \bullet \frac{\partial}{\partial T_{ij}}|_e$$

Wir identifizieren $T_e \mathbf{GL}_n$ mit $\mathbf{gl}_n$ vermittels des k-linearen Isomorphismus[32]

$$T_e \mathbf{GL}_n \xrightarrow{\cong} \mathbf{gl}_n ,\ \frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e \mapsto = E_{uv} = (\frac{\partial T_{ij}}{\partial T_{uv}}|_e),$$

und identifizien auf diese Weise

---

[31] Dies ist der Isomorphismus di_e von 4.4.10 Beispiel 3 (vlg. den sechsten Schritt im Beweis von 4.4.10 Beispiel 3).

[32] Dies ist der Isomorphismus di_e von 4.4.10 Beispiel 3 (vlg. den sechsten Schritt im Beweis von 4.4.10 Beispiel 3).

$$T_e\mathbf{D}_n \xrightarrow{\cong} \mathbf{t}_n$$

mit den oberen Dreiecksmatrizen von $\mathbf{gl}_n$.

5. Schritt. Im Fall $G = \mathbf{U}_n = \{(x_{ij}) \mid x_{ij} = 0$ für $i > j$ und $x_{ii}=0$ für alle i$\}$ besteht $T_e\mathbf{U}_n$ aus den nilpotenten oberen Dreiecksmatrizen von $\mathbf{gl}_n$.

Wegen $G = V(T_{ij}, T_{ii}-1 \mid i \neq j)$ besteht T_eG aus allen

$$D = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\cdot \frac{\partial}{\partial T_{ij}}|_e$$

mit $D(T_{ij}) = 0$ für $i > j$ und $D(T_{ii}-1) = 0$ für alle i, d.h. mit $c_{ij} = 0$ für $i > j$ und $c_{ii} = 0$ für alle i, d.h. aus den

$$D = \sum_{1\le i<j\le n} c_{ij}\cdot \frac{\partial}{\partial T_{ij}}|_e$$

Wir identifizieren $T_e\mathbf{GL}_n$ mit $\mathbf{gl}_n$ vermittels des k-linearen Isomorphismus[33]

$$T_e\mathbf{GL}_n \xrightarrow{\cong} \mathbf{gl}_n\ ,\ \frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e \mapsto = E_{uv} = (\frac{\partial T_{ij}}{\partial T_{uv}}|_e),$$

und identifizien auf diese Weise

$$T_e\mathbf{D}_n \xrightarrow{\cong} \mathbf{u}_n$$

mit den nilpotenten oberen Dreiecksmatrizen von $\mathbf{gl}_n$.

QED.

4.4.11 Aufgabe 3: $SL_2 \longrightarrow PSL_2$ *73*

Sei ϕ: $\mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbf{PSL}_2$ der Homomorphismus von 2.1.5 Aufgabe 3. Zeigen Sie, $d\phi$ ist genau dann bijektiv, wenn die Charakteristik p des Grundkörpers ungleich 2 ist. Beschreiben Sie $d\phi$ im Fall p = 1.

Beweis. Wie in 2.1.5 Aufgabe 3 bezeichnen wir mit

$A := k[\mathbf{SL}_2]$

$B := k[\mathbf{PSL}_2]$

die Koordinatenringe der beiden Gruppen. Wegen

$B \subseteq A$

und $\mathbf{SL}_2$ zusammenhängend (2.2.2 Aufgabe 1) sind beide Koordinatenringe Integritätsbereiche. Für jeden der in 2.1.5 Aufgabe 3 angegebenen Erzeuger t_i von A über k gilt

$t_i^2 \in B$.

Deshalb bilden die Quotientenkörper von A und B eine algebraische Körpererweiterung, deren Grad eine Potenz von 2 ist

$[\mathbf{Q}(A) : \mathbf{Q}(B)]$ ist eine Potenz von 2.

1. Schritt. Der Fall $p \neq 2$.

[33] Dies ist der Isomorphismus di_e von 4.4.10 Beispiel 3 (vlg. den sechsten Schritt im Beweis von 4.4.10 Beispiel 3).

Die Körpererweiterung

$$\mathbf{Q}(A) / \mathbf{Q}(B)$$

ist separabel algebraisch. Nach 4.2.9B gilt

$$\Omega_{\mathbf{Q}(A)/\mathbf{Q}(B)} = 0.$$

Auf Grund der ersten fundamentalen exakten Sequenz 4.2.6 ist der natürliche Q(A)-lineare Homomorphismus

$$\Omega_{\mathbf{Q}(B)/k} \otimes_{\mathbf{Q}(B)} \mathbf{Q}(A) \xrightarrow{\cong} \Omega_{\mathbf{Q}(A)/k}$$

surjektiv. Nach 4.2.7 ist es sogar ein Isomorphismus. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm, dessen Zeilen fundamentalen exakte Sequenzen 4.2.6 sind.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \Omega_{\mathbf{Q}(B)/k} \otimes_{\mathbf{Q}(B)} Q(A) & \xrightarrow{\cong} & \Omega_{\mathbf{Q}(A)/k} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0 \\
& \alpha\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \longrightarrow & \Omega_{B/k} \otimes_B A & \xrightarrow{\xi} & \Omega_{A/k} & \longrightarrow & \Omega_{A/B} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Weil A und B Koordinatenringe linearer algebraischer Gruppen sind, sind die zugehörigen Differentialmoduln (endlich erzeugt und) frei (nach 4.4.2):

$\Omega_{A/k}$ ist freier A-Modul von Rang dim $\mathbf{SL}_2$

Insbesondere induziert die natürliche Einbettung $A \hookrightarrow \mathbf{Q}(A)$ eine injektive Abbildung

$$\begin{aligned}
\Omega_{B/k} \otimes_B A \hookrightarrow \Omega_{B/k} \otimes_B \mathbf{Q}(A) \\
&= \Omega_{B/k} \otimes_B \mathbf{Q}(B) \otimes_{\mathbf{Q}(B)} \mathbf{Q}(A) \\
&=^{34} \Omega_{\mathbf{Q}(B)/k} \otimes_{\mathbf{Q}(B)} \mathbf{Q}(A)
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten

α ist injektiv.

Dann ist aber auch

ξ injektiv.

Wegen

$$A = k[t_1,t_2,t_3,t_4] = B[t_1,t_2,t_3,t_4]$$

gilt

$$\Omega_{A/B} = B\bullet t_1 + B\bullet t_2 + B\bullet t_3 + B\bullet t_4$$

(nach Bemerkung 4.2.1(iv)). Weil $t_i^2 \in B$ gilt für jedes i, erhalten wir mit $d = d_{B/A}$

$$0 = d(t_i^2) = 2\bullet dt_i$$

Weil die Charakteristik des Grundkörpers k von 2 verschieden sein soll, ist 2 ein Einheit in A, und es gilt $dt_i = 0$ für jedes i, also

$$\Omega_{A/B} = 0.$$

Damit ist aber ξ auch surjektiv, also ein Isomorphismus. Wir wenden den Funktor

$$\mathrm{Hom}_A(?, k_e)$$

auf diesen Isomorphismus an und erhalten einen A-linearen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, k_e) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/k} \otimes_B A, k_e)$$

---

[34] vgl. 4.2.5 Aufg.3.

$$= \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, k_e)$$

(vgl. Anhang Tensorprodukt, 1.11(v)) und damit einen k-linearen Isomorpphismus

$$T_e\mathbf{SL}_2 = \mathrm{Der}_k(A, k_e) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_k(B, k_e) = T_e\mathbf{PSL}_2,\ D \mapsto D|_B$$

2. <u>Schritt</u>. Der Fall p = 2.
Nach 4.4.11 Aufgabe 1 gilt

$$T_e\mathbf{SL}_2 = \{X \in T_e\mathbf{GL}_2 \mid X(T_{11})+X(T_{22}) = 0\}$$

Weil der Koordinatenring $B = k[\mathbf{PSL}_2]$ von den Restklassen der Produkte $T_{ij}\bullet T_{uv}$ erzeugt wird und

$$d\phi: T_e\mathbf{SL}_2 \longrightarrow T_e\mathbf{PSL}_2,\ X \mapsto X|_B$$

die durch die natürliche Einbettung

$$\phi^*: k[\mathbf{PSL}_2] = B \hookrightarrow A = k[\mathbf{SL}_2]$$

induziert ist, gilt

$$\mathrm{Ker}(d\phi) = \{X \in T_e\mathbf{SL}_2 \mid X(T_{ij}\bullet T_{uv}) = 0\}$$

Zeigen wir, der Kern besteht aus allen Diagonalmatrizen (der Spur 0).
<u>Behauptung</u>: $\mathrm{Ker}(d\phi) = \{X \in T_e\mathbf{SL}_2 \mid X(T_{12}) = X(T_{21}) = 0\}$.
In der Charakteristik 2 enthält also $T_e\mathbf{SL}_2$ einen eindimensionalen Unterraum, der in die Null abgebildet wird. Insbesondere ist $d\phi$ weder injektiv noch surjektiv.
<u>Beweis von</u> "$\subseteq$".
Sei $D \in \mathrm{Ker}(d\phi)$. Dann gilt

$$0 = D(T_{11}\bullet T_{12}) = \delta_{11}\bullet D(T_{12}) + D(T_{11})\bullet\delta_{12} = D(T_{12}),$$

also $D(T_{12}) = 0$.
Weiter gilt
$0 = D(T_{21}\bullet T_{11}) = \delta_{21}\bullet D(T_{11}) + D(T_{21})\bullet\delta_{11} = D(T_{21})$,
also $D(T_{21}) = 0$.
<u>Beweis von</u> "$\supseteq$".
Sei D aus der Menge $= \{X \in T_e\mathbf{SL}_2 \mid X(T_{12}) = X(T_{21}) = 0\}$, D sei eine Diagonalmatix mit der Spur 0. Wir haben zu zeigen,

$$X(T_{ij}\bullet T_{uv}) = 0$$

für beliebige $i,j,u,v \in \{1,2\}$. Sei

$$a_{ij} := D(T_{ij}).$$

Dann gilt

$$X(T_{ij}\bullet T_{uv}) = \delta_{ij}\bullet a_{uv} + a_{ij}\bullet\delta_{uv} \tag{1}$$

<u>Fall</u> 1: (i,j) = (u,v).
Es gilt $(1) = \delta_{ij}\bullet a_{ij} + a_{ij}\bullet\delta_{ij} = 2\bullet\delta_{ij}\bullet a_{ij} = 0$
weil die Charakteristik p = 2 sein soll.
<u>Fall</u> 2. $(i,j) \neq (u,v)$.
<u>Fall</u> 2.1: $i \neq j$ und $u \neq v$.
Es gilt $(1) = 0\bullet a_{uv} + a_{ij}\bullet 0 = 0$.

Fall 2.2. $i = j$ und $u \neq v$.
Es gilt (1) $= 1\cdot a_{uv} + a_{ij}\cdot 0 = a_{uv} = 0$ (letzteres wegen $u \neq v$).
Fall 2.3. $i \neq j$ und $u = v$.
Es gilt (1) $= 0\cdot a_{uv} + a_{ij}\cdot 1 = a_{ij} = 0$ (letzteres wegen $i \neq j$).
Fall 2.4. $i = j$ und $u = v$.
Es gilt (1) $= 1\cdot a_{uv} + a_{ij}\cdot 1 = a_{uv} + a_{ij} = a_{11} + a_{22} = 0$ (letzteres wegen $D\in T_e\mathbf{SL}_2$.
Damit ist gezeigt, daß (1) stets 0 ist, also D im Kern von $d\phi$ liegt.
QED.

4.4.11 Aufgabe 4:L(T) ≅ k⊗X(T)* *73*

Sei T ein Torus. Zeigen Sie, es gibt einen Isomorphismus $L(T) \xrightarrow{\cong} k\otimes_{\mathbb{Z}}X_*(T)$ (mit $X_*(T)$ wie in 3.2.1).

Vorbemerkung
Wir geben zwei Beschreibungen desselben Isomorphimus an. Die erste ist elementarer, aber koordinatenintensiver. Die zweite ist theoretischer, benutzt aber das nachfolgende Lemma 4.4.12. Man könnte im hier vorliegenden Spezialfall ohne dieses Lemma auskommen, indem man das Differential der Multiplikationsabbildung des Torus

$$T = D_n$$

explizit berechnet, was den technischen Aufwand vergrößern würde.

1. Beweis.

1. Schritt. Konstruktion einer Abbildung $X_*(T) \longrightarrow T_e(T)$, $\lambda \mapsto X_\lambda$.
Die Charaktere von T bilden eine k-Vektorraumbasis der Koordinatenrings,

$$k[T] = \sum_{\chi\in X^*(T)} k\cdot\chi,$$

(nach 3.2.3). Für $f = \sum_{\chi\in X^*(T)} c_\chi\cdot\chi$ setzen wir

$$X_\lambda(f) := \sum_{\chi\in X^*(T)} c_\chi\cdot\langle\chi , \lambda \rangle$$

(siehe 3.2.11A zur Defintion von der Paarung < , >). Auf diese Weise ist ein k-lineare Abbildung

$$X_\lambda: k[G] \longrightarrow k$$

definiert. Wir haben zu zeigen, daß X_λ eine Derivation $k[G] \longrightarrow k_e$ ist. Für je zwei Elemente aus dem Koordinatenring von T, sagen wir

$$f = \sum_{\chi\in X^*(T)} c_\chi\cdot\chi \text{ und } g = \sum_{\chi\in X^*(T)} d_\chi\cdot\chi,$$

gilt

$$X_\lambda(f\bullet g) = X_\lambda\Big(\big(\sum_{\chi'\in X^*(T)} c_{\chi'}\bullet\chi'\big)\bullet\big(\sum_{\chi''\in X^*(T)} c_{\chi''}\bullet\chi''\big)\Big)$$

$$= X_\lambda\Big(\sum_{\chi',\chi''\in X^*(T)} c_{\chi'}\bullet c_{\chi''}\bullet\chi'\bullet\chi''\Big)$$

$$= \sum_{\chi',\chi''\in X^*(T)} c_{\chi'}\bullet c_{\chi''}\bullet X_\lambda(\chi'\bullet\chi'') \qquad (X_\lambda \text{ ist k-linear})$$

$$= \sum_{\chi',\chi''\in X^*(T)} c_{\chi'}\bullet c_{\chi''}\bullet <\chi'+\chi'', \lambda> \qquad (\text{Definition von } X_\lambda)^{35}$$

$$=^{36} \sum_{\chi',\chi''\in X^*(T)} c_{\chi'}\bullet c_{\chi''}\bullet <\chi', \lambda> + \sum_{\chi',\chi''\in X^*(T)} c_{\chi'}\bullet c_{\chi''}\bullet <\chi'', \lambda>$$

$$= \sum_{\chi''\in X^*(T)} c_{\chi''}\bullet X_\lambda(f) + \sum_{\chi'\in X^*(T)} c_{\chi'}\bullet X_\lambda(g)$$

Weil Charaktere das neutrale Element e von T in die 1 abbilden, können wir die erhaltene Identität in der Gestalt

$$X_\lambda(f\bullet g) = g(e)\bullet X_\lambda(f) + f(e)\bullet X_\lambda(g)$$

schreiben.

2. <u>Schritt</u>. Konstruktion einer k-linearen Abbildung

$$\varphi: k\otimes_{\mathbb{Z}} X^*(T) \longrightarrow T_e(T),\ c\otimes\lambda \mapsto c\bullet X_\lambda$$

Es reicht zu zeigen, die Abbildung

$$\psi: k \times X^*(T) \longrightarrow T_e(T),\ (c, \lambda) \mapsto c\bullet X_\lambda$$

ist wohldefiniert und bilinear über $\mathbb{Z}$ (d.h. biadditiv). Sie ist wohldefiniert, weil X_λ nach dem ersten Schritt im Tangentialraum $T_e(T)$ liegt und dieser Tangentialraum ein k-Vektorraum ist.

Die Abbildung ist trivialerweise additiv bezüglich ihres ersten Arguments c. Sie ist additiv bezüglich λ, weil die Paarung $<\chi, \lambda>$ es ist. Genauer, für $\lambda', \lambda'' \in X^*(T)$ und

$$f = \sum_{\chi\in X^*(T)} c_\chi\bullet\chi \in k[T]$$

gilt

$$X_{\lambda'+\lambda''}(f) = \sum_{\chi\in X^*(T)} c_\chi\bullet<\chi, \lambda'+\lambda''>$$

$$= \sum_{\chi\in X^*(T)} c_\chi\bullet(<\chi, \lambda'> + <\chi,\lambda''>)$$

---

[35] Die Summe zweier Charaktere in X*(T) ist definiert als das Produkt der zugehörigen Funktionen des Koordinatenrings.

[36] Die Paarung < , > ist bilinear über $\mathbb{Z}$, vgl. 3.2.11A.

$$= \sum_{\chi\in X^*(T)} c_\chi\bullet<\chi , \lambda'> + \sum_{\chi\in X^*(T)} c_\chi\bullet<\chi,\lambda''>$$
$$= X_{\lambda'}(f) + X_{\lambda''}(f)$$

also

$$X_{\lambda'+\lambda''} = X_{\lambda'} + X_{\lambda''}.$$

Damit ist ψ auch additiv bezüglich des zweiten Arguments.

3. <u>Schritt</u>. Die Abbildung des zweiten Schritts ist bijektiv.

Es reicht zu zeigen, diese Abbildung überführt eine k-Vektorraumbasis von

$$k\otimes_{\mathbb{Z}}X^*(T)$$

in eine k-Vektorraumbasis von

$$T_e(T).$$

Wir können dabei T durch einen in T isomorphen Torus ersetzen, also annehmen,

$$T = \mathbf{D}_n$$

Der Tangentialraum des Torus besitzt die Dimensin

$$\dim_k T_e(T) = \dim T \qquad \text{(nach 4.4.6)}$$

Weil der Transzendentgrad von

$$k(\mathbf{D}_n) = k(T_1, T_1^{-1},...,T_n,T_n^{-1}) = k(T_1,...,T_n)$$

über k gleich n ist, folgt

$$\dim_k T_e(T) = n.$$

Nach Beispiel 3.2.2 gilt

$$k\otimes_{\mathbb{Z}}X^*(D_n) \cong k\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}^n \cong k^n,$$

also

$$\dim_k k\otimes_{\mathbb{Z}}X^*(T) = n$$

die beiden Räume haben also dieselbe Dimension. Es reicht zu zeigen die Abbildung φ des zweiten Schritts überführt eine Basis von $k\otimes_{\mathbb{Z}}X^*(T)$ in k-linear unabhängige Vektoren.

Auf Grund des Isomorphismus (3) von Beispiel 3.2.2 bilden die Kocharaktere der Gestalt

$$\lambda_i: \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{D}_n,\ c \mapsto \text{diag}(1,...,c, ...,1),$$

eine Basis des freien $\mathbb{Z}$-Moduls $X_*(\mathbf{D}_n)$ (dabei befinde sich der Eintrag c auf der Hauptdiagonalen in der Position (i,i)). Deshalb bilden die Elemente der Gestalt

$$1\otimes\lambda_i \in k\otimes_{\mathbb{Z}}X^*(D_n)$$

eine k-Vektorraumbasis von $k\otimes_{\mathbb{Z}}X^*(D_n)$. Das Bild von $1\otimes\lambda_i$ bei der Abbildung φ des zweiten Schritts ist

$$\varphi(1\otimes\lambda_i) = X_{\lambda_i}.$$

Es reicht zu zeigen, daß die Bilder X_{λ_i} der Basiselemente $1\otimes\lambda_i$ linear unabhängi über k sind. Seien $c_1,...,c_n \in k$ Elemente mit

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_{\lambda_i} = 0.$$

Wir haben zu zeigen, die c_i sind gleich 0.

Nach Definition ist

$$\varphi(1\otimes\lambda_i)(T_{jj}) = X_{\lambda_i}(T_{jj}) = \langle T_{jj}, \lambda_i\rangle.$$

Dabei bezeichne $T_{jj} : D_n \longrightarrow k$ den Charakter, welcher jede Matrix auf deren Eintrag in der Position (j,j) abbildet. Insbesondere gilt für jedes $c \in k^*$,

$$c^{\langle T_{jj}, \lambda_i\rangle} = T_{jj}(\lambda_i)(c) = \begin{cases} c \text{ für } i = j \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

also

$$\langle T_{jj}, \lambda_i\rangle = \delta_{ij} . \tag{1}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i X_{\lambda_i}\Big)(T_{jj}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i X_{\lambda_i}(T_{jj}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \langle T_{jj}, \lambda_i\rangle \qquad \text{(nach Definition von } X_{\lambda_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{ij} \qquad \text{(nach (1))} \\ &= c_j \end{aligned}$$

Weil dies für jedes j gilt, sind alle c_i gleich 0. Die X_{λ_i} sind k-linear unabhängig und die Abbildung des zweiten Schritts ein k-linearer Isomorphismus.

QED.

2. Beweis.

Wir identifizieren den ersten Tensorfaktor k von $k\otimes_{\mathbb{Z}}X_*(T)$ mit dem Tangentialraum im neutralen Element der multiplikativen Gruppe $\mathbf{G}_m$ (vgl. 4.4.10 Beispiel 2). Es reicht, einen k-linearen Isomorphismus

$$\varphi: T_e\mathbf{G}_m\otimes_{\mathbb{Z}} X_*(T) \longrightarrow T_eT.$$

zu konstruieren. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$T_e\mathbf{G}_m \times X_*(T) \longrightarrow T_eT,\ (v, \lambda) \mapsto (d\lambda_e)(v), \tag{2}$$

d.h. wir wenden das Differential $d\lambda_e: T_e\mathbf{G}_m \longrightarrow T_eT$ der regulären Abbildung

$$\lambda: \mathbf{G}_m \longrightarrow T$$

in der zweiten Koordinate auf die erste Koordinate an. Die Abbildung φ ist additiv bezüglich des ersten Arguments v. Wir haben zu zeigen, sie ist es auch bezüglich des zweiten Arguments λ. Dazu reicht es zu zeigen,

$$d(\lambda'+\lambda'')_e = d\lambda'_e + d\lambda''_e \text{ für } \lambda', \lambda'' \in X_*(T).$$

Nun ist die Summe der beiden Kocharaktere λ'und λ'' gerade definiert als das Produkt der beiden regulären Abbildungen $\lambda', \lambda'': \mathbf{G}_m \longrightarrow T$, d.h. für $c \in k^* = \mathbf{G}_m$ gilt

$$(\lambda'+\lambda'')(c) = \mu(\lambda'(c), \lambda''(c)) = (\mu\circ(\lambda',\lambda''))(c),$$

also

$$\lambda'+\lambda'' = \mu\circ(\lambda',\lambda''). \qquad (3)$$

Dabei soll

$$\mu: T\times T \longrightarrow T$$

die Multiplikation des Torus T bezeichen und

$$(\lambda',\lambda''): \mathbf{G}_m \longrightarrow T\times T$$

die reguläre Abbildung, für welche die Zusammensetzungen mit den beiden Projektionen p_i: $T\times T \longrightarrow T$ gleich λ' bzw. λ'' sind,

$$p_1\circ(\lambda',\lambda'') = \lambda' \text{ und } p_2\circ(\lambda',\lambda'') = \lambda''.$$

Für die Differntiale in e erhaten wir

$$(dp_1)_e\circ d(\lambda', \lambda'')_e = d\lambda'_e \text{ und } (dp_2)_e\circ d(\lambda', \lambda'')_e = d\lambda''_e,$$

d.h.

$$d(\lambda', \lambda'')_e = (d\lambda'_e , d\lambda''_e): T_e\mathbf{G}_m \longrightarrow T_eT\times T_eT$$

ist die k-lineare Abbildung mit den Koodinatenfunktionen $d\lambda'_e$ und $d\lambda''_e$. Zusammen mit (3) erhalten wir

$$d(\lambda'+\lambda'')_e = d\mu_{(e,e)} \circ d((\lambda',\lambda''))_e$$

also für $v \in T_e\mathbf{G}_m$

$$\begin{aligned} d(\lambda'+\lambda'')_e(v) &= d\mu_{(e,e)}(d((\lambda',\lambda''))_e(v)) \\ &= d\mu_{(e,e)}((d\lambda')_e(v), (d\lambda'')_e(v)) \\ &= (d\lambda')_e(v) + (d\lambda'')_e(v) \qquad \text{(nach 4.4.12)} \\ &= ((d\lambda')_e+ (d\lambda'')_e)(v) \end{aligned}$$

Weil dies für alle v gilt, folgt

$$d(\lambda'+\lambda'')_e = (d\lambda')_e+ (d\lambda'')_e$$

Damit ist gezeigt, daß die Abbildung (2) bilinear über $\mathbb{Z}$ ist, also eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\varphi:T_e\mathbf{G}_m\otimes_{\mathbb{Z}} X_*(T) \longrightarrow T_eT, v\otimes\lambda \mapsto (d\lambda_e)(v),$$

definiert. An der Abbildungsvorschrift lesen wir ab, diese Abbildung ist k-linear: weil $d\lambda_e$ eine k-lineare Abbildung ist, gilt

$$\varphi(c\bullet v\otimes\lambda) = (d\lambda_e)(c\bullet v) = c\bullet(d\lambda_e)(v) = c\bullet\ \varphi(c\bullet v\otimes\lambda)$$

für jedes $c \in k$.

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, diese Abbildung ist ein k-linearer Isomorphismus. Dazu reicht es zu zeigen, daß sie eine k-Vektorraumbasis in k-linear unabhängige Vektoren überführt.

Wir können annehmen, $T = \mathbf{D}_n$. Nach 4.4.10 Beispiel 2 gilt

$$T_e\mathbf{G}_m = k\cdot T\cdot \frac{d}{dT}|_{T=e}$$

Bezeichnet

$$\lambda_i: \mathbf{G}_m \longrightarrow T = \mathbf{D}_n,\ c \mapsto \mathrm{diag}(1,...,1,c,1,...,1)$$

wie im ersten Beweis den Kocharakter mit $< T_{jj}, \lambda_i > = \delta_{ij}$ für alle j (d.h. der Eintrag c befinde sich in der Position (i,i)), so bilden die λ_i ein Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls $X_*(T)$.
Damit bilden die

$$T\cdot \frac{d}{dT}|_{T=e}\otimes \lambda_i \in T_e\mathbf{G}_m\otimes_{\mathbb{Z}} X_*(T)$$

eine Basis des k-Vektorraums $T_e\mathbf{G}_m\otimes_{\mathbb{Z}} X_*(T)$. Wir haben die Bilder dieser Basis-Elemente zu berechnen. Wir betrachen die Elemente

$$f \in k[\mathbf{D}_n]$$

als Funktionen von n×n-Matrizen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(T\cdot \tfrac{d}{dT}|_{T=e}\otimes \lambda_i)(f(\mathrm{diag}(T_{11},...,T_{nn})) &= (d\lambda_i)_e(T\cdot \tfrac{d}{dT}|_{T=e})(\ f(\mathrm{diag}(T_{11},...,T_{nn})) \\
&= (T\cdot \tfrac{d}{dT}|_{T=e})(\lambda_i^*\ f(\mathrm{diag}(T_{11},...,T_{nn})) \\
&= (T\cdot \tfrac{d}{dT}|_{T=e})(f(\mathrm{diag}(1,...,1,T,1,...,1)) \qquad \text{(mit T in der Position (i,i))} \\
&= \frac{\partial f}{\partial T_{ii}}|_e
\end{aligned}$$

also

$$\varphi(T\cdot \frac{d}{dT}|_{T=e}\otimes \lambda_i) = \frac{\partial}{\partial T_{ii}}|_e\ .$$

Die Derivationen $\frac{\partial}{\partial T_{ii}}|_e \in T_e\mathbf{D}_n$, denn aus

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\cdot\frac{\partial}{\partial T_{ii}}|_e = 0 \text{ mit } c_i \in k$$

folgt

$$\begin{aligned}
0 &= (\sum_{i=1}^{n} c_i\cdot\frac{\partial}{\partial T_{ii}}|_e)(T_{jj}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot\frac{\partial T_{jj}}{\partial T_{ii}}|_e \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot\delta_{ij} \\
&= c_j
\end{aligned}$$

d.h. $c_j = 0$ für $j = 1,...,n$.
QED.

4.4.11 Aufgabe 5: $L(G) = L(G^0)$ ***73***

Zeigen Sie, es gilt $L(G) = L(G^0)$.

Beweis. Weil G^0 eine offene Umgebung des neutrelen Elements von G ist, gilt

$$T_e G = T_e G^0.$$

QED.

4.4.11 Aufgabe 6: Ad x ∈ Aut(L(G)) *73*

Zeigen Sie, Ad x (mit x∈G)ist ein Automorphismus der Lie-Algebra L(G).

Beweis. Für jedes g ∈ G bezeichne

$$\sigma_g: G \longrightarrow G,\ x \mapsto gxg^{-1},$$

die Konjugation mit g. Weil $\sigma_{g^{-1}}$ invers ist zu σ_g, d.h.

$$\sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g = \mathrm{id} = \sigma_g \circ \sigma_{g^{-1}},$$

gilt

$$(d\,\sigma_{g^{-1}})_e \circ (d\,\sigma_g)_e = \mathrm{Id} = (d\,\sigma_g)_e \circ (d\,\sigma_{g^{-1}})_e,$$

also (vgl. 4.4.1B)

$$(\mathrm{Ad}\ g^{-1}) \circ (\mathrm{Ad}\ g) = \mathrm{Id} = (\mathrm{Ad}\ g) \circ (\mathrm{Ad}\ g^{-1}).$$

Wir haben gezeigt, Ad g und Ad g^{-1} sind zueinander inverse k-lineare Isomorphismen. Nach 4.4.9 sind alle Differentiale von Homomorphismen linearer algebraischer Gruppen im neutralen Elemente Homomorphismen von Lie-Algebren. Das gilt insbesondere für

$$\mathrm{Ad}\ g = (d\,\sigma_g)_e.$$

QED.

4.4.11 Aufgabe 7: df(Ad(x)(X)) *73*

Sei ϕ: G ⟶ H eine Homomorphismus von linearen algebraischen Gruppen. Zeigen Sie, für x ∈ G und X ∈ L(G) gilt

$$(d\phi)((\mathrm{Ad}\ x)(X)) = \mathrm{Ad}(\phi(x))(d\phi(X))$$

Beweis. Wir setzen

$$\sigma_g(x) = gxg^{-1}$$

für beliebige x, g ∈ G und auch für beliebige g,x ∈ H,

Weil ϕ ein Gruppen-Homomorphismus ist, ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & H \\ \sigma_g \downarrow & & \downarrow \sigma_{\phi(g)} \\ G & \xrightarrow{\phi} & H \end{array}$$

für jedes g ∈ G kommutativ: für x∈ G gilt

$$(\sigma_{\phi(g)} \circ \phi)(x) = \phi(g)\bullet\phi(x)\bullet\phi(g)^{-1} = \phi(gxg^{-1}) = (\phi\circ\sigma_g)(x).$$

Wir gehen zu den Differentialen im neutralen Element über und erhalten die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{d\phi} & T_eH \\ \mathrm{Ad}\ g \downarrow & & \downarrow \mathrm{A}\ d\phi(g) \\ T_eG & \xrightarrow{d\phi} & T_eH \end{array}$$

d.h. es gilt die behauptete Identität.
QED.

4.1.12 Differentailformeln 74

4.1.12A Vereinbarungen und Bezeichnungen 74

Wir geben als nächstes eine Formeln der Differentialrechnung an, die wir im folgendne verwenden werden. Wie bisher sei

$$G$$

eine lineare algebraische Gruppe. Wir bezeichnen mit

$$\mu: G \times G \longrightarrow G \text{ und } i: G \longrightarrow G$$

die Multiplikation von G und den Übergang zum Inversen Element (wie in 2.1.1) und identifizieren die Lie-Algebra von G×G mit der direkten Summe L(G)⊕L(G),

$$L(G\times G) = L(G)\oplus L(G)$$

(vgl. 4.1.9 Aufgabe 2, zweiter Beweis).

4.4.12B Lemma: die Differentiale von μ und i 74

Seien G eine lineare algebraische Gruppe mit der Multiplikationsabbildung

$$\mu: G\times G \longrightarrow G,\ (x,y) \mapsto x\bullet y,$$

und dem Übergang zum Inversen

$$i: G \longrightarrow G,\ x \mapsto x^{-1}.$$

Wir identifizieren $T_{(e,e)}(G\times G)$ mit $T_eG \oplus T_eG$ mit Hilfe des Isomorphismus von 4.1.9 Aufgabe 2,

$$\varphi: T_{(e,e)}(G\times G) \xrightarrow{\cong} T_eG \oplus T_eG,\ X \mapsto ((dp_1)X, (dp_2)X).$$

Dabei sei p_i: G×G ⟶ G die Projektion auf den i-ten Faktor (für i = 1,2). Es gelten die folgenden Aussagen.

(i) Das Differential von μ in e ist die k-lineare Abbildung

$$d\mu: T_eG \oplus T_eG \longrightarrow T_eG,\ (X, Y) \mapsto X+Y.$$

(ii) Das Differential von i in e ist die k-lineare Abbildung

$$di: T_eG \longrightarrow T_eG,\ X \mapsto -X.$$

Beweis (abweichend vom Original).
Zu (i). Es gilt

$$\mu\circ q_i = id$$

für i = 1,2, also

$$d\mu\circ dq_i = id. \tag{1}$$

Für $X,Y \in T_eG$ folgt

$$\begin{aligned} (d\mu)(\varphi^{-1}(X,Y)) &= ((d\mu)\circ\varphi^{-1})((X,0)+(0,Y)) \\ &= ((d\mu)\circ\varphi^{-1})((X,0)) + ((d\mu)\circ\varphi)\ (0,Y)) \end{aligned}$$

$$= (d\mu)(\varphi^{-1}(X,0)) + (d\mu)(\varphi^{-1}(0,Y))$$
$$= (d\mu)(dq_1(X)) + (d\mu)(dq_2(Y)) \qquad \text{(nach (iii))}$$
$$= X + Y \qquad \text{(nach (1))}$$

wie behauptet.
Zu (ii). Sei

$$\Delta: G\times G \longrightarrow G,\ x \mapsto (x,y),$$

die Diagonalabbildung. Dann gilt für jedes $x \in G$

$$\begin{aligned} \mu(((id\times i))(\Delta(x))) &= \mu(((id\times i))((x,x))) \\ &= \mu(x, x^{-1}) \\ &= x\bullet x^{-1} \\ &= e, \end{aligned}$$

d.h.

$$\mu\circ(id\times i)\circ\Delta = e$$

ist die konstante Abbildung mit dem einzigen Wert e. Wir gehen zu den Differentialen im neutralen Element über und erhalten

$$d\mu\circ d(id\times i)\circ d\Delta = de = 0.$$

Für $X \in T_eG$ gilt deshalb

$$\begin{aligned} 0 &= (d\mu\circ d(id\times i)\circ d\Delta)(X) \\ &= (d\mu\circ d(id\times i))(X,X) && \text{(nach 4.1.9, Aufg.2 (iii))} \\ &= (d\mu((X,(di)X) && \text{(nach 4.1.9, Aufg.2 (iv))} \\ &= X + (di)(X) && \text{(nach (i))} \end{aligned}$$

also

$$(di)X = -X,$$

wie behauptet.
QED.

4.4.13 Lemma: $d(x \mapsto \sigma(x)x^{-1})$ und $d(x \mapsto axa^{-1}x^{-1})$ 74

(i) Seien G eine lineare algebraische Gruppe und

$$\sigma: G \longrightarrow G,\ x \mapsto \sigma(x),$$

eine reguläre Abbildung und ϕ die reguläre Abbildung

$$\phi: G \longrightarrow G,\ x \mapsto \sigma(x)\bullet x^{-1}.$$

Dann gilt

$$d\phi_e = d\sigma_e - id.$$

(ii) Seien G eine lineare algebraische Gruppe, $a \in G$ und ψ die reguläre Abbildung

$$\psi: G \longrightarrow G,\ x \mapsto axa^{-1}x^{-1}.$$

Dann gilt

$$d\psi_e = Ad\ a - id.$$

Beweis. Zu (i). Das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\Delta} & G\times G & x & \mapsto & (x,x) \\ \phi\downarrow & & \downarrow\sigma\times i & \downarrow & & \downarrow \\ G & \xleftarrow{\mu} & G\times G & \phi(x) & \leftarrow\!\shortmid & (\sigma(x);x^{-1}) \end{array}$$

Dabei bezeichne Δ: G $\longrightarrow$ G×G die diagonale Einbettung, i: G$\longrightarrow$G den Übergang zum inversen Element und μ:G×G $\longrightarrow$ G die Multiplikation der Gruppe. Mit

$$\phi = \mu\circ(\sigma\times i)\circ\Delta$$

gilt aber auch

$$d\phi = d\mu\circ d(\sigma\times i)\circ d\Delta$$

also mit $X \in T_e G$

$$\begin{aligned} d\phi(X) &= (d\mu\circ d(\sigma\times i))(X,X) && \text{(nach 4.1.9 Aufg.2(iii))} \\ &= (d\mu)((d\sigma)X, (di)X) && \text{(nach 4.1.9 Aufg.2(iv))} \\ &= (d\sigma)X + (di)X && \text{(nach 4.4.12(i))} \\ &= (d\sigma)X - X && \text{(nach 4.4.12(ii))} \\ &= (d\sigma - id)X \end{aligned}$$

Da dies für alle X gilt, folgt

$$d\phi = d\sigma - id,$$

wie behauptet.
<u>Zu (ii)</u>. Bezeichne

$$\sigma_a: G \longrightarrow G,\ x \mapsto axa^{-1}.$$

Dann gilt $\psi(x) = \sigma_a(x)\bullet x^{-1}$, also nach (i)

$$d\psi_e = (d\sigma_a)_e - id.$$

Nach 4.4.1B ist aber $(d\sigma_a)_e = Ad(a)$, sodaß

$$d\psi_e = Ad(a) - id$$

gilt, wie behauptet.
QED.

4.4.14 Rationale Darstellungen und deren Differentaile74

4.4.14A Definitionen 74

Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Dann bezeichne

$$\mathbf{gl}(V)$$

die Lie-Algebra der Endomorphismen von V mit der Lie-Klammer

$$[X, Y] := X\circ Y - Y\circ X$$

und im Fall einer positiven Charakteristik p des Grundkörpers k mit der p-Operation

$$X^{[p]} := X^p = X\circ...\circ X \text{ (p-mal)}.$$

Eine <u>Darstellgung einer Lie-Algebra</u> A auf V ist ein Lie-Algbra-Homomorphismus

$$A \longrightarrow \mathbf{gl}(V).$$

Seien G' und G" zwei lineare algebraische Gruppen und V' und V" zwei endlich-dimensionale k-Vektorräume und

$$\phi': G' \longrightarrow \mathbf{GL}(V') \text{ und } \phi'': G'' \longrightarrow \mathbf{GL}(V'')$$

zwei rationale Darstellungen. Dann heißen die rationalen Darstellungen

$$\phi'\oplus\phi'': G'\times G'' \longrightarrow GL(V'\oplus V''),\ (x',x') \mapsto ((v', v'') \mapsto (\phi'(x')v', \phi''(x'')v'')$$

$$\phi'\otimes_k\phi'': G'\times G'' \longrightarrow GL(V'\otimes_k V''),\ (x',x') \mapsto ((v'\otimes v'') \mapsto (\phi'(x')v'\otimes\phi''(x'')v'')$$

von G'×G" auf V'⊕V bzw. $V'\otimes_k V''$ <u>direkte Summe</u> bzw. <u>Tensorprodukt</u> der Darstellungen ϕ' und ϕ''.

Bemerkungen

(i) Es gilt $\mathbf{gl}(V) \cong \mathbf{gl}_{\dim V}$.

(ii) Sei

$$\phi: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V),\ x \mapsto \phi(x),$$

eine rationale Darstellung (2.3.2 Beispiel 3) der linearen algebraischen Gruppe G. Dann ist das Differential im neutralen Element

$$d\phi: L(G) \longrightarrow L(\mathbf{GL}(V)) =^{37} \mathbf{gl}(V)$$

ein Homormorphismus von Lie-Algebren, also eine Darstellgung von L(G) auf V.

(iii) Die direkte Summe und das Tensorprodukt von zwei rationalen Darstellungen ist tatsächlich eine rationale Darstellung.

Beweis. Zu (i). Mit Hilfe einer Basis des Vektorraums V, sagen wir

$$v_1,\ldots,v_n \in V$$

erhalten wir einen k-linearen Isomorphismus

$$\varphi_V: k^n \xrightarrow{\cong} V,\ \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} c_i v_i,$$

der einen Isomorphismus von k-Algebren

$$\mathbf{gl}(V) \xrightarrow{\cong} \mathbf{gl}(k^n) = \mathbf{gl}(n, k),\ f \mapsto \varphi_V \circ f \circ \varphi_V^{-1},$$

induziert (welcher gleichzeitig ein Isomorphismus von Lie-Algebren über k ist, welcher im Fall einer positiven Charakteristik p die p-Operationen respektiert). Identifiziert man die k-linearen Endomorphismen von k^n mit den Matrizen bezüglich der Standard-Einheitsbasis, so erhält man einen weiteren k-linearen Isomorphismus,

$$\mathbf{gl}(k^n) \xrightarrow{\cong} \mathbf{gl}_n,$$

der ebenfalls ein Isomorphismus von Lie-Algebren über k ist, welcher im Fall einer positiven Charakteristik p die p-Operationen respektiert. Zusammen herhalten wir die behauptete Isomorphie (mit $n = \dim_k V$).

Zu (ii). Nach 4.4.9 ist das Differentialm im neutralen Element

$$d\phi: T_e G \longrightarrow T_e \mathbf{GL}(V)$$

des Homomorphismus linearer algebraischer Gruppen

$$\phi: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V),\ x \mapsto \phi(x),$$

ein Homomorphismus von (eingeschränkten) Lie-Algebren.

Nach 4.4.10 Beispiel 3 Aussage (ii) besteht ein Isomorphismus

$$\mathbf{gl}_n \longrightarrow L(\mathbf{GL}_n),\ X \mapsto D_X. \tag{1}$$

von (eingeschränkten) Lie-Algebren über k. Identifiziert man mit Hilfe des Isomorphismus

$$\alpha_{\mathbf{GL}_n}: L(\mathbf{GL}_n) \longrightarrow T_e \mathbf{GL}_n$$

von 4.4.5 (i) die Lie-Algebra mit dem Tangentialraum im neutralen Element, so wird (1) gerade mit dem Differential der natürlichen Einbettung $\mathbf{GL}_n \hookrightarrow \mathbb{A}^{n^2}$ identifiziert (auf Grund des kommutativen Diagramms von 4.4.10 Beispiel 3 Aussage(iii)).

---

[37] vgl. 4.4.10 Beispiel 3 und 2.1.5 Aufgabe 1.

Zu (iii). Seien

$$\phi': G' \longrightarrow \mathbf{GL}(V') \text{ und } \phi'': G'' \longrightarrow \mathbf{GL}(V'')$$

rationale Darstellungen, d.h. Gruppen-Homomorphismen mit der Eigenschaft, daß bei einer Identifikation

$$\mathbf{GL}(V') = \mathbf{GL}_{n'} \text{ und } \mathbf{GL}(V') = \mathbf{GL}_{n''}$$

mit Hilfe von k-Vektorraumbasen

$$v'_1,..., v'_{n'} \text{ von } V' \text{ und } v''_1,..., v''_{n''} \text{ von } V''$$

die Abbildungen die Gestalt

$$\phi'(x) = \begin{pmatrix} \phi'_{11}(x) \dots & \phi'_{1n'}(x) \\ \dots \quad \dots & \dots \\ \phi'_{n'1} \quad \dots & \phi'_{n'n'}(x) \end{pmatrix} \text{ und } \phi''(x) = \begin{pmatrix} \phi''_{11}(x) \dots & \phi''_{1n''}(x) \\ \dots \quad \dots & \dots \\ \phi''_{n''1} \quad \dots & \phi''_{n''n''}(x) \end{pmatrix}$$

bekommen mit regulären Funktionen $\phi'_{ij} \in k[G']$ bzw. $\phi''_{ij} \in k[G'']$. Für die Bezüglich der k-Vektorraumbasis

$$v'_1,..., v'_{n'} , v''_1,..., v''_{n''} \text{ von } V'\oplus V''$$

bekommt dann die direkten Summe von ϕ' und ϕ'' die Gestalt

$$(\phi'\oplus\phi'')(x',x'') = \begin{pmatrix} \phi'(x') & 0 \\ 0 & \phi''(x'') \end{pmatrix},$$

d.h. $\phi'\oplus\phi''$ ist ein rationale Darstellung von $G'\times G''$ auf $V'\oplus V''$.
Bezüglich der k-Vektorraumbasis

$$v'_i\otimes v''_j \text{ von } V'\otimes_k V'' \ (i = 1,..., n', j = 1,..., n'')$$

bekommt das Tensorprodukt ϕ' und ϕ'' die Gestalt

$$(\phi'\otimes\phi'')(x',x'') = \Big(\sum_{\alpha=1}^{n'} \sum_{\beta=1}^{n''} \phi'_{\alpha i}(x')\bullet\phi''_{\beta j}(x')\Big)_{i=1,\dots,n',j=1,\dots,n''}$$

Man beachte, wegen

$$\phi'(x')v'_i = \phi'_{1i}(x')\bullet v'_1 +...+ \phi'_{n'i}(x')\bullet v'_{n'} = \sum_{\alpha=1}^{n'} \phi'_{\alpha i}(x')\bullet v'_\alpha$$

und

$$\phi''(x'')v''_j = \phi'_{1j}(x'')\bullet v''_1 +...+ \phi''_{n''j}(x'')\bullet v''_{n''} = \sum_{\beta=1}^{n''} \phi''_{\beta j}(x')\bullet v''_\beta$$

gilt

$$(\phi'(x')\otimes \phi''(x''))(v'_i\otimes v''_j) \quad = (\phi'(x'))(v'_i)\otimes(\phi''(x''))(v''_j)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n'} \sum_{\beta=1}^{n''} \phi'_{\alpha i}(x')\bullet\phi''_{\beta j}(x')\bullet(v'_\alpha\otimes v''_\beta)$$

Also ist $\phi'\otimes\phi''$ eine rationale Darstellung.
QED.

4.4.14B Lemma: ⊕ und ⊗ ***75***

Seien G' und G'' zwei lineare algebraische Gruppen, V' und V'' zwei endlich-dimensionale k-Vektorräume und

$$\phi': G' \longrightarrow \mathbf{GL}(V') \text{ und } \phi'': G'' \longrightarrow \mathbf{GL}(V'')$$

zwei rationale Darstellungen. Dann gilt

(i) $d(\phi'\oplus\phi'') = d\phi' \oplus d\phi''$.

(ii) $(d(\phi'\otimes\phi'')(X,Y))(v',v'') = ((d\phi')(X))(v')\otimes v'' + v'\otimes(d\phi'')(Y)(v'')$

für $X \in T_e G'$, $Y \in T_e G''$, $v' \in V'$ und $v'' \in V''$.

Beweis. Zu (i). Nach 4.1.9 Aufgabe 2, Aussage (iv), ist das folgende Diagramm kommutativ.
Wir betrachten das Diagramm von k-linearen Abbildungen.

$$\begin{array}{ccc} T_e(G'\times G'') & \xrightarrow{d(\phi'\times\phi'')} & T_e(\mathbf{GL}(V')\times\mathbf{GL}(V'')) \\ \varphi\downarrow\cong & & \cong\downarrow\psi \\ T_e G' \oplus T_e G'' & \xrightarrow{d\phi'\oplus d\phi''} & T_e\mathbf{GL}(V') \oplus T_e GL(V'') \end{array}$$

Dabei sei die untere horizontale Abbildung wir folgt definiert.

$$d\phi'\oplus d\phi''(X,Y) := (d\phi'(X), d\phi''(Y)) \text{ für } X\in T_e G' \text{ und } Y\in T_e G''$$

Die vertikalen Abbildungen seien die Isomorphismen von 4.1.9 Aufgabe 2, Aussage (i), d.h.

$$\varphi(X) = ((dp')X, (dp'')X) \text{ für } X \in T_e(G'\times G'')$$

und

$$\psi(X) = ((dp')X, (dp'')X) \text{ für } X \in T_e(GL(V')\times GL(V''))$$

Dabei soll p' die Projektion

$$G'\times G'' \longrightarrow G' \text{ bzw. } \mathbf{GL}(G')\times\mathbf{GL}(V'')\longrightarrow\mathbf{GL}(V')$$

auf den ersten Faktor und p" die Projektion

$$G'\times G'' \longrightarrow G'' \text{ bzw. } \mathbf{GL}(G')\times\mathbf{GL}(V'')\longrightarrow\mathbf{GL}(V'')$$

auf den zweiten Faktor bezeichnen. Nach 4.1.9 Aufgabe 2, Aussage (iv), ist dann das Diagramm kommutativ. Wir verwenden jetzt die vertikalen Isomorphismen, um die obere Zeile des Diagramm mit der unteren zu identifizieren.

Die Zusammensetzung der obereren horizontalen Abbildung des Diagramms mit dem Differential

$$di: T_e\mathbf{GL}(V') \oplus T_e\mathbf{GL}(V'') \longrightarrow T_e\mathbf{GL}(V'\oplus V'')$$

der natürlichen Einbettung[38]

$$i:\mathbf{GL}(V')\times\mathbf{GL}(V'') \hookrightarrow \mathbf{GL}(V'\oplus V''),\ (f, g) \rightarrowtail f\oplus g,$$

ist gerade die Darstellung $d\phi'\oplus d\phi''$: $T_e(G'\times G'') \longrightarrow T_e\mathbf{GL}(V'\oplus V'')$. Weil i das Produkt links mit einer abgeschlossenen Teilmenge der Gruppe rechts identifiziert, ist das Differential di ebenfalls injektiv (nach 4.1.9 Aufgabe 4). Man kann also den Definitionsbereich von di mit dem Bild von di identifizieren.

Die Behauptung ergibt sich also aus der Kommutativität des Diagramms.

Zu (ii). Weil $d(\phi'\otimes\phi'')$ eine k-lineare Abbildung ist, gilt

$d(\phi'\otimes\phi'')(X,Y) = d(\phi'\otimes\phi'')((X,0)+(0, Y))$

---

[38] Fixiet man k-Vektorraumbasen für V' und V", so kann man diese Abbildung mit der Abbildung

$$\mathbf{GL}_m\times\mathbf{GL}_n \longrightarrow \mathbf{GL}_{m+n},\ (A, B) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

identifizieren.

$$= d(\phi'\otimes\phi'')(X,0) + d(\phi'\otimes\phi'')(0,Y)$$

Es reicht zu zeigen

$$d(\phi'\otimes\phi'')(X,0)(v',v'') = ((d\phi')(X))(v')\otimes v'' \tag{1}$$

und

$$d(\phi'\otimes\phi'')(0,Y)(v',v'') = v'\otimes(d\phi'')(Y)(v'').$$

Aus Symmetriegründen reicht es eine der beiden Identitäten zu beweisen. Wir beschränkten uns auf den Beweis von (1).

1. Schritt. Seien V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $v \in V$ ein Vektor. Dann ist

$$\varphi_v : \mathbf{GL}(V) \longrightarrow V,\ f \mapsto f(v),$$

eine reguläre Abbildung affiner Varietäten.[39] Das Differential dieser Abbildung im neutralen Element hat dieselbe Abbildungsvorschrift wie φ_v selbst,

$$d\varphi_v : \mathbf{gl}(V) \longrightarrow V,\ f \mapsto f(v),$$

wenn wir den Tangential von $\mathbf{GL}(V)$ mit der Lie-Algebra $\mathbf{gl}(V)$ identifizieren

Die Aussage ergibt sich aus 4.1.10 Ergänzung (wenn man durch Einführen einer Basis V mit einem k^n und gl(V) mit einem k^m identifiziert).

2. Schritt.

Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G'\times G'' \arrow[r, "\phi'\otimes\phi''"] & \mathbf{GL}(V'\otimes V'') & (x,e'') \arrow[r, mapsto] & \phi'(x)\otimes\phi''(e'') = \phi'(x)\otimes 1 \\
G' \arrow[u, "q'"] \arrow[r, "\phi'"] & \mathbf{GL}(V')' \arrow[u, "r'"] & x \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \phi'(x) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

mit $q'(x') = (x', e'')$ und $r'(f) = f\otimes 1$. Wir gehen zu den Differentialen im neutralen Element über und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T_{e'}G'\oplus T_{e''}G'' \arrow[r, "d(\phi'\otimes\phi'')"] & T_e\mathbf{GL}(V'\otimes V'') \\
T_{e'}G' \arrow[u, "dq'"] \arrow[r, "d\phi'"] & T_e GL(V') \arrow[u, "dr'"]
\end{tikzcd}$$

Nach 4.1.9 Aufgabe 2, Aussage (ii) gilt

$$(dq')(X) = (X,0) \text{ für } X \in T_{e'}G'$$

also

$$\begin{aligned} d(\phi'\otimes\phi'')(X,0) &= (d(\phi'\otimes\phi'')\circ dq')(X) \\ &= (dr'\circ d\phi')(X). \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt das Bild von $d(\phi'\otimes\phi'')(X,0) \in T_e\mathbf{GL}(V'\otimes V'')$ beim Differential der Auswertung an der Stelle $v'\otimes v'' \in V'\otimes V''$,

$$\varphi_{v'\otimes v''} : \mathbf{GL}(V'\otimes V'') \longrightarrow V'\otimes V'',\ f \mapsto f(v'\otimes v'').$$

[39] Wir betrachten V als affine Varietät mit der symmetrishen Algebra $S_k(V^*)$ als Koordinatenring.

Nach dem ersten Schritt gilt

$$(d\varphi_{v'\otimes v''})(d(\phi'\otimes\phi'')(X,0)) = (d(\phi'\otimes\phi'')(X,0))(v'\otimes v'')$$

also

$$\begin{aligned}(d(\phi'\otimes\phi'')(X,0))(v'\otimes v'') &= (d\varphi_{v'\otimes v''})((dr'\circ d\phi')(X))\\ &= d(\varphi_{v'\otimes v''}\circ r'\circ\phi)(X)\\ &= d(\varphi_{v'\otimes v''}\circ r')(d\phi)(X)\end{aligned}$$

Wir erhalten das Bild von X beim Differential der Abbildung

$$G' \xrightarrow{\phi'} \mathbf{GL}(V') \xrightarrow{r'} \mathbf{GL}(V'\otimes V'') \xrightarrow{\varphi_{v'\otimes v''}} V'\otimes V'',$$

$$x' \mapsto \phi'(x') \mapsto \phi'(x)\otimes 1 \mapsto (\phi'(x)\otimes 1) = (\phi'(x)v')\otimes v''.$$

d.h. der Abbildung

$$G' \xrightarrow{\phi'} \mathbf{GL}(V') \xrightarrow{\varphi_{v'}} V' \xrightarrow{t_{v''}} V'\otimes V'',$$

$$x' \mapsto \phi'(x) \mapsto \phi'(x)(v') \mapsto (\phi'(x)v')\otimes v'',$$

mit

$$t_{v''}(x) = x\otimes v''.$$

Die auf diese Weise definierte Abbildung

$$t_{v''}: V' \longrightarrow V'\otimes V''$$

ist k-linear. Wenn wir für V' und $V'\otimes V''$ irgendwelche k-Vektorraumbasen wählen, sehen wir, daß die Abbildungsvorschrift für $d\,t_{v''}$ dieselbe ist wie die für $t_{v''}$ (vgl. 4.1.10 Ergänzung).

Wir erhalten

$$\begin{aligned}(d(\phi'\otimes\phi'')(X,0))(v'\otimes v'') &= (dt_{v''}\circ d\varphi_{v'}\circ d\phi')(X)\\ &= (dt_{v''}\circ d\varphi_{v'})((d\phi')(X))\\ &= dt_{v''}((d\phi')(X)(v')) \quad \text{(nach dem ersten Schritt)}\\ &= (d\phi')(X)(v')\otimes v''.\end{aligned}$$

Damit ist (1) bewiesen.

QED.

4.4.15 Aufgaben: Differentiale 75

4.4.15 Aufgabe 1: rationale Darstellungen 75

Sei $\phi: G \longrightarrow \mathbf{GL}_n$ eine rationale Darstellung. Wir setzen

$$\phi(x) := (f_{ij}(x)) \text{ mit } f_{ij} \in k[G].$$

Dann gilt

$$d\phi(X) = (Xf_{ij})$$

für jedes $X \in L(G)$.

Beweis. Wir identifizieren $T_e\mathbf{GL}_n$ mit den n×n-Matrizen $\mathbf{gl}_n$ mit Hilfe des Isomorphismus

$$di_e: T_e\mathbf{GL}_n \xrightarrow{\cong} \mathbf{gl}_n\,,\ X \mapsto (X(T_{ij}))_{i,j=1,\dots,n}\,,$$

von 4.4.10 Beispiel 2, Aussage (iii), d.h. wir identifizieren $d\phi$ mit der Zusammensetzung

$$T_eG \xrightarrow{d\phi_e} T_e\mathbf{GL}_n \xrightarrow{di_e} \mathbf{gl}_n.$$

Für $X \in T_eG$ gilt dann

$$\begin{aligned}(di_e \circ d\phi_e)(X) &= (di)_e(X\circ\phi^*) && \text{(nach Definition von } d\phi_e\text{)}\\ &= ((X\circ\phi^*)(T_{ij}))_{i,j=1,\dots,n} && \text{(nach Definition von } di_e\text{)}\\ &=(X(\phi^*(T_{ij})))_{i,j=1,\dots,n} && \\ &=(X(T_{ij}\circ\phi))_{i,j=1,\dots,n} && \text{(nach Definition von } \phi^*\text{)}\\ &= (X(f_{ij}))_{i,j=1,\dots,n} && \text{(nach Definition der } f_{ij}\text{9}\end{aligned}$$

also

$$(di_e \circ d\phi_e)(X) = (X(f_{ij}))_{i,j=1,\dots,n}. \tag{1}$$

Sei jetzt

$$di: L(\mathbf{GL}_n) \underset{\alpha_{GL_n}}{\overset{\cong}{\longrightarrow}} T_e\mathbf{GL}_n \underset{di_e}{\overset{\cong}{\longrightarrow}} \mathbf{gl}_n$$

die Zusammensetzung des Isomorphismus α von 4.4.5(i) und des Isomorphismus di_e von 4.4.10 Beispiel 2, Aussage (iii), d.h. für $D \in L(\mathbf{GL}_n)$ gelte

$$(di)(D) = (di_e)(D_e) = (D_e(T_{ij})) = (D(T_{ij})(e)) = (D(T_{ij}))(e),$$

d.h.

$$(di)(D) = (D(T_{ij}))(e). \tag{2}$$

Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} L(G) \arrow[r, "d\phi"] \arrow[d, "\alpha_G", "\cong"'] & L(\mathbf{GL}_n) \arrow[r, "di", "\cong"'] \arrow[d, "\alpha_{\mathbf{GL}_n}", "\cong"'] & \mathbf{gl}_n \arrow[d, equal] \\ T_eG \arrow[r, "d\phi_e"] & T_eGL_n \arrow[r, "di_e", "\cong"'] & \mathbf{gl}_n \end{tikzcd}$$

kommutativ.[40] Mit Hilfe der vertikalen Isomorphismen können wir $d\phi$ mit $d\phi_e$ und di mit di_e identifizieren. Wenn wir außerdem noch $L(\mathbf{GL}_n)$ mit Hilfe von di mit $\mathbf{gl}_n$ identifizieren, werden di und di_e zu identischen Abbildungen und (1) bekommt die Gestalt

$$(d\phi)(X) = (X(f_{ij}))_{i,j=1,\dots,n}.$$

Dies ist die Behauptung.
QED.

4.4.15 Aufgabe 2: Rechtstranslationen *75*

Seien G eine lineare algebraische Gruppe und

$$V \subseteq k[G]$$

[40] Das linke Vierekc ist kommutativ nach Definition von $d\phi$, das rechte ist es nach Definition von di.

ein endlich-dimensionaler k-linearer Unterraum, der stabil ist bei allen Linkstranslationen

$$\lambda(x)(V) \subseteq V \text{ für alle } x \in G.$$

Sei

$$\phi: G \longrightarrow GL(V)$$

die durch die Linkstranslationen $\lambda(x)$ definierte rationale Darstellung. Dann gilt

$$d\phi(X)(f) = Xf \qquad (1)$$

für jedes $X \in L(G)$ und jedes $f \in V$, wobei X als Element von

$$L(G) \subseteq \mathcal{D}_G$$

zu betrachten ist. Geben Sie ein ähnliches Ergebnis für die Rechtstranslationen $\rho(x)$ an.
<u>Hinweis</u>: nutzen Sie die Tatsache, daß[41]

$$\rho(x) = \iota\circ\lambda(x)\circ\iota^{-1}$$

gilt mit dem Isomorphismus $\iota: k[G] \longrightarrow k[G]$, der durch den Übergang zum Inversen induziert wird.

<u>Antwort</u>: Ist $W \subseteq k[G]$ eine endlich-dimensionaler k-linearer Unterraum, der unter allen Rechtstranslationen stabil ist, so gilt für $f \in W$ und $X \in L(G)$

$$d\psi(X)(f) = X(f).$$

Beweis. 1. <u>Schritt</u>. Es gelten die Aussagen bezüglich der Linkstranslationen. Mit Ausnahme von (1) ergibt sich dies aus 2.3.6. Zum Beweis von (1) betrachten wir die regulären Abbildungen

$$\mu: G\times G \longrightarrow G,\ (x,y) \mapsto \mu(x,y) := x\bullet y,$$

$$i: G \longrightarrow G,\ x \mapsto i(x) := x^{-1},$$

$$q_x: G \longrightarrow G\times G,\ y \mapsto (x,y),$$

$$L_{x^{-1}} = \mu\circ(i\times id)\circ q_x: G \longrightarrow G,\ y \mapsto (x,y) \mapsto (x^{-1},y) \mapsto x^{-1}\bullet y,$$

$$\phi: G \longrightarrow GL(V),\ x \mapsto L^*_{x^{-1}}$$

$$\varphi_v:\ GL(V) \longrightarrow V,\ A \mapsto A(v), \qquad (\text{für } v \in V)$$

Für $v \in V$ ($\subseteq k[G]$) gilt

$$\begin{aligned} \varphi_v \circ \phi &= L^*_{x^{-1}}(v) \\ &= v\circ L_{x^{-1}} \\ &= v\circ \mu\circ(i\times id)\circ q_x \end{aligned}$$

Wir gehen zu den Differentialen im neutralen Element von G über und erhalten

$$d\varphi_v\circ d\phi = dv\circ d\mu\circ d(i\times id)\circ dq_x$$

also für $X \in T_eG$:

$$\begin{aligned} (d\varphi_v\circ d\phi)(X) &= (dv\circ d\mu\circ d(i\times id)\circ dq_x)(X) \\ &= (dv\circ d\mu\circ d(i\times id)(0,X) \qquad (\text{nach 4.1.9 Aufgabe 2(ii)}) \end{aligned}$$

---

[41] Im Original steht $\rho(x) = \iota\circ\lambda(x^{-1})\circ\iota$. Dies ist wohl ein Tippfehler, vgl. 2.3.6I.

$= (dv\circ d\mu((di)0,(d(id)X)$ (nach 4.1.9 Aufgabe 2(iv))
$= (dv)((di)0+(d(id)X)$ (nach 4.4.1B(i))
$= (dv)(0+X)$ (di ist linear und d(id) = id)
$= (dv)(X)$

also

$$(d\varphi_v)((d\phi)X) = (dv)(X)$$

Das Differential von $d\varphi_v$ haben wir im ersten Schritt des Beweises von 4.4.14B(ii) beschrieben. Auf Grund dieser Beschreibung erhalten wir

$$((d\phi)(X))(v) \quad = (dv)(X) \tag{2}$$

Auf der linken Seite steht der Wert an der Stelle v eines Elements aud dem Bild von

$$d\phi\colon T_eG \longrightarrow T_eGL(V) = Der_k(k[\mathbf{GL}(V),k_e)$$

also ein Element von k.

Wegen $v \in V \subseteq k[G]$ steht auf der rechten Seite ein Element aus dem Bild des Differentials der regulären Funktione $v: G \longrightarrow k = \mathbb{A}^1$, d.h. ein Element von

$$T_e(\mathbb{A}^1)$$

Diesen Tangentialraum haben wir mit k identifiziert mit Hilfe der Abbildung

$$k \longrightarrow T_e(\mathbb{A}^1),\ c \mapsto c\bullet\frac{\partial}{\partial T},$$

wenn

$$T\colon \mathbb{A}^1 \longrightarrow k$$

die Koordinatenfunktion des $\mathbb{A}^1$ bezeichnet, d.h. die identische Abbildung $\mathbb{A}^1 \longrightarrow k$, welche den Koordinatenring $k[\mathbb{A}^1] = k[T]$ erzeugt (vgl. 4.1.9 Beispiel 1(ii)). Die Umkehrung dieser Abbildung ist

$$T_e(\mathbb{A}^1) \longrightarrow k,\ \ D = c\bullet\frac{\partial}{\partial T} \mapsto c = D(T).$$

Damit bekommt (2) die Gestalt

$((d\phi)(X))(v) = ((dv)(X))(T)$
$= (X\circ v^*)(T)$ (nach Defintion des Differentials)
$= X(v^*(T))$
$= X(T\circ v)$
$= X(v)$ (T ist die identische Abbildung).

Damit ist (1) bewiesen.

2. <u>Schritt</u>. Die durch die Rechtstranslationen definierte rationale Darstelleung

$$\psi\colon G \longrightarrow GL(\iota V)$$

ist auf ιV definiert und für $f \in V$ und $X \in L(G)$ gilt

$$d\psi(X)(\iota f) = \iota(X(f)). \tag{3}$$

Ist $W \subseteq k[G]$ eine endlich-dimensionaler ρ-stabiler Unterraum, so gilt für $f\in W$ und $X\in L(G)$

$$d\psi(X)(f) = X(f). \tag{4}$$

Wegen $\rho(x) = \iota\circ\lambda(x)\circ\iota^{-1}$ (vgl. 2.3.6I) ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\lambda_V} & \mathbf{GL}(V) \\ \| & & \cong\downarrow\sigma \\ G & \xrightarrow{\rho_V} & \mathbf{GL}(\iota V) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x \mapsto \lambda(x)|_V, & & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ x \mapsto \rho(x)|_{\iota(V)}, & & \iota\circ A\circ\iota^{-1} \end{array}$$

wenn σ den Isomorphismus

$$\sigma\colon \mathbf{GL}(V) \longrightarrow \mathbf{GL}(i(V)),\ A \mapsto \iota\circ A\circ\iota^{-1},$$

bezeichnet und λ_V und ρ_V die Einschränkungen der Darstellungen λ und ρ auf V. Mit $\phi := \lambda_V$ ist damit auch $\psi := \rho_V$ eine rationale Darstellung und es gilt

$$\begin{aligned} d\psi &= d\rho_V \\ &= d(\sigma\circ\lambda_V) \\ &= d\sigma\circ d\lambda_V \\ &= d\sigma\circ d\phi \end{aligned}$$

Nach Definition hängt $\sigma(A)$ linear von A ab. Deshalb ist die Abbildungsvorschrift für $d\sigma$ dieselbe (vgl. 4.1.10 Ergänzung)[42] wie für σ, d.h.

$$d\sigma\colon T_e\mathbf{GL}(V) \longrightarrow T_e\mathbf{GL}(\iota V),\ A \mapsto \iota\circ A\circ\iota^{-1},$$

Es folgt

$$\begin{aligned} d\psi(X)(\iota f) &= ((d\sigma\circ d\phi)(X))(\iota f) \\ &= (d\sigma(d\phi(X)))(\iota f) \\ &= (\iota\circ d\phi(X)\circ\iota^{-1})(\iota f) \\ &= (\iota\circ d\phi(X))(f) \\ &= \iota(X(f)) && \text{(nach (1))} \end{aligned}$$

Damit ist Formel (3) bewiesen. Wir haben noch zu zeigen, daß auch Formel (4) gilt. Weil der Übergang zum inversen Element,

$$i\colon G \longrightarrow G,\ x \mapsto x^{-1},$$

ein Isomorphismus von algebraischen Varietäten ist, ist der Antipode

$$\iota = i^*\colon k[G] \longrightarrow k[G]$$

ein Isomorphismus von k-Algebren. Der vorgegebene Raum W hat deshalb die Gestalt

$$W = \iota V$$

mit einem k-linearen Unterraum $V \subseteq k[G]$ endlicher Dimension, der stabil ist unter Linkstranslationen. Auf Grund von (3) gilt also

$$d\psi(X)(f) = \iota(X(\iota(f)))$$

für $f \in W = \iota V$ und $X \in L(G)$. Es folgt

$$\begin{aligned} d\psi(X)(f) &= \iota(X(i^*(f))) \\ &= \iota(di(X)(f)) \\ &= -\,\iota(X(f)) && \text{(nach 4.4.12B(ii))} \end{aligned}$$

also

$$\iota(d\psi(X)(f)) = -\,X(f) \qquad (\iota \text{ ist selbstinvers})$$

[42] σ läßt sich linear fortsetzen zu einer Abbildung affiner Räume. Das Differential in e dieser Abbildung ist dasselbe wie das von σ.

also für jedes $x \in G$

$$(d\psi(X)(f))(x^{-1}) = -(X(f)(x),$$

d.h.

$$d\psi(X)(i^*f) = -X(f)$$

d.h.

$$\begin{aligned} X(f) &= - di\circ d\psi(f) \\ &= d\psi(f) \qquad \text{(nach 4.4.12B(ii))}. \end{aligned}$$

QED.

4.4.15 Aufgabe 3: die adjungierte Darstellung 75

Das Differential der adjungierten Darstellung Ad (von 4.4.5) ist gegeben durch

$$dAd(X)(Y) = [X,Y] \text{ für } X,Y \in L(G).$$

Hinweis. Betrachten Sie zuerst den Fall $G = \mathbf{GL}_n$.

Beweis. 1. Schritt. Der Fall $G = \mathbf{GL}_n$.

Wir beschreiben zunächst für $a \in G$ die Zusammensetzung

$$\varphi: G \xrightarrow{Ad} GL(T_eG) \xrightarrow[\cong]{di_e} \mathbf{gl}_{n^2}$$

$$a \mapsto Ad\ a \mapsto ((Ad\ a)(T_{ij}))_{i,j=1,...,n}$$

von Ad mit dem Isomorphismus di_e von 4.4.10 Beispiel (iii), wobei wir T_eG mit Hilfe der Basis der $\frac{\partial}{\partial T_{ij}}|_e$ (i,j = 1,...,n) mit dem k^n identifizieren. Nach Definition ist

$$Ad\ a = d\sigma_a: T_eG \longrightarrow T_eG$$

das Differential im neutralen Element der Konjugation mit a

$$\sigma_a: G \longrightarrow G,\ x \mapsto axa^{-1}.$$

Das Bild von $\frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e$ bei $Ad\ a = d\sigma_a$ ist gleich

$$\begin{aligned} (Ad\ a)(\frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e) &= (d\sigma_a)(\frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e) && \text{(Definition von Ad a)} \\ &= \frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e \circ \sigma_a^* && \text{(nach Definition des Differentials)} \end{aligned}$$

Wir schreiben

$$a = (a_{ij}) \text{ und } a^{-1} = b = (b_{ij})$$

Wenn die Einträge von a (und damit von b) Funktionen eines Arguments u sind, und

$$a(u_0) = e \text{ (und damit auch } b(u_0) = e$$

gilt für ein $u = u_0 \in k$, so erhalten wir wegen

$$Id = a\bullet b$$

auf Grund der Produktregel

$$0 = \frac{d}{du}|_{u_0} = ((\frac{d}{du}\bullet a)\bullet b + a\bullet(\frac{d}{du}b))|_{u_0} = \frac{da}{du}|_{u_0} + \frac{db}{du}|_{u_0} \tag{1}$$

Es folgt mit den invarianten Vektorfeldern D_{uv} im Beweis von 4.4.10 Beispiel 3 erhalten wir

$$((\mathrm{Ad}\ a)(\frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e)(T_{ij}) = (\frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e \circ \sigma_a^*)(T_{ij})$$
$$= \frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e (\sigma_a^*(T_{ij}))$$
$$= \frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e (T_{ij}\circ\sigma_a)$$
$$= \frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e (\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{i\alpha}\cdot T_{\alpha\beta}\cdot b_{\beta j})$$
$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \alpha_{i\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e (T_{\alpha\beta})\cdot b_{\beta j}$$
$$= a_{iu}\cdot b_{vj}$$

also

$$((\mathrm{Ad}\ a)(\sum_{u,v=1}^{n} c_{uv}\cdot\frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e)(T_{ij}) = \sum_{u,v=1}^{n} a_{iu}\cdot c_{uv}\cdot b_{vj}$$

also für $c = (c_{ij}) \in k^{n^2}$:

$$((\mathrm{Ad}\ a)(\sum_{u,v=1}^{n} c_{uv}\cdot\frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e) = a\cdot c\cdot b$$

Für das Differential im neutralen Element erhalten wir

$$(d(\mathrm{Ad})(\frac{\partial}{\partial a_{rs}}|_e)(\sum_{u,v=1}^{n} c_{uv}\cdot\frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e) = \frac{\partial}{\partial a_{rs}}|_e(a\cdot c\cdot b)$$
$$= \frac{\partial}{\partial a_{rs}}|_e(a)\cdot c\cdot e + e\cdot c\cdot \frac{\partial}{\partial a_{rs}}|_e(b)$$

Wege $b = a^{-1}$ ist $\frac{\partial}{\partial a_{rs}}|_e(b) = -\frac{\partial}{\partial a_{rs}}|_e(a)$, d.h.

$$(d(\mathrm{Ad})(\frac{\partial}{\partial a_{rs}}|_e)(\sum_{u,v=1}^{n} c_{uv}\cdot\frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e) = \frac{\partial}{\partial a_{rs}}|_e(a)\cdot c - c\cdot \frac{\partial}{\partial a_{rs}}|_e(a)$$
$$= E_{rs}\cdot c - c\cdot E_{rs}$$

also mit $d = (d_{ij}) \in k^{n^2}$:

$$(d(\mathrm{Ad})(\sum_{r,s=1}^{n} d_{rs}\cdot\frac{\partial}{\partial a_{rs}}|_e)(\sum_{u,v=1}^{n} c_{uv}\cdot\frac{\partial}{\partial T_{uv}}|_e) = \sum_{r,s=1}^{n} d_{rs}\cdot(E_{rs}\cdot c - c\cdot E_{rs})$$
$$= d\cdot c - c\cdot d$$
$$= [d, c]$$

Wir identifizieren $T_e\mathbf{GL}_n$ unter Verwendung der Basis der $\frac{\partial}{\partial a_{rs}}|_e$ mit $\mathbf{gl}_n$ und erhalten

$$(d(\mathrm{Ad})(d))(c) = [d,c]$$

wie behauptet.

2. <u>Schritt</u>. Der allgemeine Fall.

Wir können annehmen, daß G eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$ ist (nach 2.3.7). Sei

$$i: G \hookrightarrow \mathbf{GL}_n$$

die natürliche Einbettumg. Diese induziert eine natürliche Einbettung der Tangentialräume im neutralen Element,

$$di_e: T_eG \hookrightarrow T_e\mathbf{GL}_n.$$

Sei

$$H := \{x \in GL(T_e\mathbf{GL}_n) \mid x(T_eG) \subseteq T_eG\}$$

die Menge der k-linearen Automorphismen des Tangentialraums $T_e\mathbf{GL}_n$, welche den Unterraum T_eG in sich abbilden. Weil H aus Automorphismen besteht gilt für $x \in H$ sogar $x(T_eG) = T_eG$ (denn $x(T_eG)$ und T_eG haben dieselbe endliche k-Vektorraum-Dimension), d.h.

$$H := \{x \in GL(T_e\mathbf{GL}_n) \mid x(T_eG) = T_eG\}$$

Auf Grund dieser Beschreibung von H liegt der identische Automorphismus in H, das Inverse jeden Elements von H in H und die Zusammensetzung zweier Elemente von H in H, d.h. H ist eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $T_e\mathbf{GL}_n$. Zeigen wir, es gilt sogar,

$$\text{H ist abgeschlossene Untergruppe von } GL(T_e\mathbf{GL}_n). \tag{2}$$

Zum Beweis wählen wir eine Basis des Tangentialraums von G, sagen wir

$$v_1, \ldots, v_{d^2} \in T_eG,$$

und ergänzen diese zu einer Basis des Tangentialraums von $\mathbf{GL}_n$, sagen wir

$$v_1, \ldots, v_{d^2}, v_{d^2+1}, \ldots, v_{n^2} \in T_e\mathbf{GL}_n.$$

Wir verwenden diese Basis um $GL(T_e\mathbf{GL}_n)$ mit GL_{n^2} zu identifizieren. Dann besteht H aus den Matrizen $A \in GL_{n^2}$ deren Produkte $A\bullet e_i$ mit den ersten d^2 Standard-Einheitsvektoren Linearkomibinationen der ersten d^2 Standard-Einheitsvektoren sind, d.h.

$$A\bullet e_i$$

ist für $i = 1, \ldots, d^2$ eine Spalte, deren von Null veschiedene Einträge in den ersten d^2 Zeilen liegen. Also besteht H aus den Matrizen der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \in GL_{n^2}$$

mit einer $d^2\times d^2$-Matrix B, einer $d^2\times(n^2- d^2)$-Matrix C und einer $(n^2- d^2)\times(n^2- d^2)$-Matrix D. Umgekehrt liegen alle Matrizen dieser Gestalt in H,

$$H = \{ A = (a_{ij}) \in \mathbf{GL}(T_e\mathbf{GL}_n) \mid a_{ij} = 0 \text{ für alle } (i,j) \text{ mit } i > d^2 \text{ und } j \le d^2\}.$$

Insbesondere ist H abgeschlossen in $\mathbf{GL}(T_e\mathbf{GL}_n)$, d.h. es gilt (2).

Nach Definition von H gibt es eine wohldefinierte Abbildung

$$\rho: H \longrightarrow \mathbf{GL}(T_eG),\ x \mapsto x|_{T_eG}.$$

Bezüglich der gerade eingeführten Koordintan hat ρ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \mapsto B,$$

d.h.

ρ ist ein Homomorphismus von linearen algebraische Gruppen.

Betrachten wir die adjungierte Darstellung von $\mathbf{GL}_n$,

$$\mathrm{Ad}\colon \mathbf{GL}_n \longrightarrow \mathbf{GL}(T_e\mathbf{GL}_n),\ a \mapsto (d\sigma_a)_e.$$

Dabei bezeichne σ_a wie bisher den inneren Automorphismus

$$\sigma_a\colon \mathbf{GL}_n \longrightarrow \mathbf{GL}_n,\ x \mapsto \sigma_a(x) = axa^{-1}.$$

Für

$$a \in G$$

ist die Einschränkung von σ_a auf G gerade der innere Automorphismus von von G, welcher durch a definiert wird, d.h. es besteht ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{GL}_n & \xrightarrow{\sigma_a} & \mathbf{GL}_n \\ i\uparrow & & i\uparrow \\ G & \xrightarrow{\sigma_a^G} & G \end{array}$$

Dabei ist

$$\sigma_a^G := \sigma_a|_G\colon G \longrightarrow G,\ x \mapsto axa^{-1},$$

der innere Automorphismus von G zum Element $a \in G$. Wir gehen zu den Differentialen im neutralen Element über und erhalten das kommuttive Diagramm von k-linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} T_eGL_n & \xrightarrow{\mathrm{Ad}\ a} & T_eGL_n \\ di\uparrow & & di\uparrow \\ T_eG & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_G(a)} & T_eG \end{array}$$

Dabei sei die vertikale Abbildung $di\colon TG \hookrightarrow T_e\mathbf{GL}_n$ das Differential der natürlichen Einbettung $i\colon G \hookrightarrow \mathbf{GL}_n$ (welches injektiv ist nach 4.1.9 Aufgabe 4), und

$$\mathrm{Ad}_G\colon G \longrightarrow \mathbf{GL}(T_eG)$$

sei die adjungierte Darstellung der Gruppe G. Die Kommutativität des Diagramms bedeutet, daß das Bild von G bei der adjungierten Darstellung

$$\mathrm{Ad}\colon \mathbf{GL}_n \longrightarrow \mathbf{GL}(T_e\mathbf{GL}_n)$$

der Gruppe $\mathbf{GL}_n$ in der Untergruppe H liegt,

$$\mathrm{Ad}(G) \subseteq H$$

und das Bild von Ad a für $a \in G$ beim Homomorphismus ρ gleich Ad_G a ist,

$$\mathrm{Ad}_G(a) = \rho(\mathrm{Ad}\ a) = (\rho\circ\mathrm{Ad})(a) \text{ für jedes } a \in G.$$

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{GL}_n \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] & \mathbf{GL}(T_e GL_n) \\
 & H \arrow[u, hook, "j"'] \arrow[d, "\rho"] \\
G \arrow[uu, hook, "i"] \arrow[ur, "\mathrm{Ad}|_G"] \arrow[r, "\mathrm{Ad}_G"] & \mathbf{GL}(T_e G)
\end{tikzcd}$$

von Homomorphismen linearer alebraischer Gruppen. Dabei sei

$$j\colon H \hookrightarrow \mathbf{GL}(T_e\mathbf{GL}_n)$$

die natürliche Einbettung. Wir gehen zu den Differentialen im neutralen Element über und erhalten ein kommutatives Diagramm von Lie-Algebra-Homomorphismen

$$\begin{tikzcd}
T_e\mathbf{GL}_n \arrow[r, "d(\mathrm{Ad})"] & T_e\mathbf{GL}(T_e GL_n) \\
 & T_e H \arrow[u, hook, "dj"'] \arrow[d, "d\rho"] \\
T_e G \arrow[uu, hook, "di"] \arrow[ur, "\xi"] \arrow[r, "d(\mathrm{Ad}_G)"] & T_e\mathbf{GL}(T_e G)
\end{tikzcd}$$

mit

$$\xi := d(\mathrm{Ad}|_G)_e = d(A)|_{T_e G}$$

Wir verwenden jetzt die oben eingeführte Basis

$$v_1, \ldots, v_{d^2}, v_{d^2+1}, \ldots, v_{n^2} \text{ von } T_e\mathbf{GL}_n,$$

deren d^2 erste Vektoren eine Basis

$$v_1, \ldots, v_{d^2} \text{ von } T_e G$$

bilden um die Elemente dieser Räume mit Spaltenvektoren und die linearen Abbildungen zwischen diesen Räumen mit Matrizen zu identifizieren.

Mit Hilfe des k-linearen komplementären Unterraums

$$L := k\cdot v_{d^2+1} + \ldots + k\cdot v_{n^2}$$

erhalten wir eine Zerlegung in eine direkte Summe

$$T_e\mathbf{GL}_n = T_e G \oplus L,$$

für welche die Abbildung di die Gestalt

$$di\colon T_e G \hookrightarrow T_e\mathbf{GL}_n,\ X \mapsto \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie bereits erwähnt, werden die Elemente von $T_e H$ zu Matrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ und die Abbildung ρ bekommt die Abbildungsvorschrift

$$\rho\colon H \longrightarrow \mathbf{GL}(T_e G),\ \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \mapsto B.$$

Das Differential von ρ im neutralen Element ist durch dieselbe Abbildungsvorschrift gegeben,

$$d\rho: T_eH \longrightarrow T_e\mathbf{GL}(T_eG), \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \mapsto B$$

(vgl. 4.1.10).

Seien X, Y $\in T_eG$. Das Element $(d(Ad)\circ di)(X) = (dj)(\xi(X))$ können wir dann als Matrix der angegebenen Gestalt schreiben,

$$(d(Ad)\circ di)(X) = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

d.h. wir erhalten

$$(d\rho\circ d(Ad)\circ di)(X) = B$$

und

$$\begin{aligned}
((d(Ad)\circ di)(X))((di)(Y)) &= \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B\cdot Y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (di)(B\cdot Y) \\
&= (di)((d\rho\circ d(Ad)\circ di)(X)(Y)) \\
&= (di)((d\rho\circ\xi)(X)(Y)) \\
&= (di)((d(Ad_G)(X)(Y)),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
(di)((d(Ad_G)(X)(Y)) &= (d(Ad)\circ di)(X))((di)(Y)) \\
&= d(Ad)((di)X)((di)Y) \\
&= [(di)X, (di)Y] && \text{(nach dem ersten Schritt)} \\
&= (di)([X,Y]) && \text{(di ist Lie-Algebra-Homomorphismus)}
\end{aligned}$$

Weil di injektiv ist, folgt

$$(d(Ad_G)(X)(Y) = [X,Y]$$

für beliebige X, Y $\in T_eG$, wie behauptet.

QED.

4.4.15 Aufgabe 4: Auflösbarkeit ***75***

(i) Die Lie-Algebra der Kommutatorgruppe (G, G) (vgl. 2.2.8) ist eine Teilalgebra von L(G), welche alle Elemente der Gestalt

$$(Ad(x) - id)X \text{ und } [X,Y]$$

mit $x \in G$, $X,Y \in L(G)$ enthält.

(ii) Ist G kommutativ (bzw. auflösbar), so gilt dasselbe für L(G).

<u>Hinweise</u>.

Der Begriff der auflösbaren Gruppe ist definiert in 2.4.13A, der der auflösbaren Lie-Algebra in 4.4.3J und der der kommutativen Lie-Algebra in 4.4.3A.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Wir betrachten die reguläre Abbildung

$$\phi_a: G \longrightarrow G,\ x \mapsto axa^{-1}x^{-1},$$

mit $a \in G$. Diese Abbildung faktorisiert sich über die Kommutatorgruppe (G,G),

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi_a} & G \\ & \tilde\phi_a \searrow & \uparrow \\ & & (G,G) \end{array}$$

Wir gehen zu den Differentialen im neutralen Element über und erhalten das kommutative Diagramm von k-linearen Abbildungen.

$$\begin{tikzcd} T_eG \arrow[r, "d\phi_a"] \arrow[dr, "d\tilde{\phi}_a"'] & T_eG \\ & T_e(G,G) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Es gilt also

$$\mathrm{Im}(d\phi_a) \subseteq T_e(G, G),$$

d.h.

$$(d\phi_a)(X) \in T_e(G, G) \text{ für jedes } X \in T_eG.$$

Nach 4.4.13 (ii) gilt $d\phi_a$ = Ad a - id. Damit ist der ersten Teil der Behauptung bewiesen:

$$(\mathrm{Ad}\ a - \mathrm{id})(X) \in T_e(G, G) \text{ für jedes } X \in T_eG \text{ und jedes } a \in G.$$

Zum Beweis des zweiten Teils betrachten wir die adjungierte Darstellung

$$\mathrm{Ad}\colon G \longrightarrow \mathbf{GL}(T_eG),$$

die konstante Abbildung

$$\mathrm{id}{:}\mathrm{Ad}\colon G \longrightarrow \mathbf{GL}(T_eG),\ x \mapsto \mathrm{id},$$

welche jedes Element von G auf den identischen Automorphismus abbildet, und die Auswertung in einem vorgegebenen Element $X \in T_eG$,

$$\varphi_Y\colon \mathbf{GL}(T_eG) \longrightarrow T_eG,\ A \mapsto A(X).$$

Wir setzen diese Abbildung auf die folgende Weise zusammen zur regulären Abbildung

$$\psi{:}G \xrightarrow{\mathrm{Ad}\text{-}\mathrm{id}} \mathbf{GL}(T_eG) \xrightarrow{\varphi_X} T_eG$$

Auf Grund des bereits bewiesenen Teils der Behauptung gilt für jedes $X \in T_eG$

$(\mathrm{Ad} - \mathrm{id})X = d\phi_a(X) \in T_e(G, G)$, d.h. die Abbildung ψ faktorisiert sich über den Tangentialraum $T_e(G, G)$,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\tilde{\psi}"'] & T_eG \\ & T_e(G,G) \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

Wir gehen zu den Differentialen im neutralen Element über und erhalten das kommutative Diagramm k-linearer Abbildungen

$$\begin{tikzcd} T_eG \arrow[r, "d\psi"] \arrow[dr, "d\tilde{\psi}"'] & T_eG \\ & T_e(G,G) \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd},$$

wobei wir hier die Tangentialräume der Vektorräum $T_e(G,G)$ und T_eG mit den Vektorräumen selbst identifiziert haben. Man beachte, das Differential di der natürlichen Einbettung wird dabei mit der natürlichen Einbettung identifiziert (vgl. 4.1.10). Es folgt

$$\mathrm{Im}(d\widetilde{\psi}) \subseteq T_e(G,G),$$

d.h.

$$(d\psi)(Y) \in T_e(G,G) \text{ für jedes } Y \in T_eG.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
d\psi &= d(\varphi_X \circ (\mathrm{Ad}-\mathrm{id})) && \text{(nach Definition von } \psi\text{)}\\
&= d\varphi_X \circ d(\mathrm{Ad}-\mathrm{id})\\
&= d\varphi_X \circ (d(\mathrm{Ad})-d(\mathrm{id}))\\
&=^{43} d\varphi_X \circ d(\mathrm{Ad})\\
&= \varphi_X \circ d(\mathrm{Ad}) && (\varphi_X \text{ ist linear, vgl. 4.1.10)}
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
d\psi(Y) &= (\varphi_X \circ d(\mathrm{Ad}))(Y)\\
&= \varphi_X(d(\mathrm{Ad})(Y))\\
&= d(\mathrm{Ad})(Y)(X)\\
&= [Y, X] && \text{(nach 4.4.15 Aufgabe 3)}
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$[Y, X] \in T_e(G,G) \text{ für beliebige } X, Y \in T_eG.$$

<u>Zu (ii)</u>. <u>Der Fall</u> G <u>kommutativ</u>.
Es gilt $(G, G) = \{e\}$, also $T_e(G, G) = \{0\}$. Nach Aussage (i) gilt

$$[X,Y] \in T_e(G, G) = \{0\} \text{ für beliebige } X, Y \in T_eG,$$

also

$$[X,Y] = 0.$$

Mit anderen Worten, die Lie-Algebra T_eG ist kommutativ.

<u>Der</u> Fall G <u>auflösbar</u>.
Nach Voraussetzung gibt es eine natürliche Zahl n mit

$$G^{(n)} = \{e\}$$

(vgl. Bemerkung 2.4.13A(iv)). Wir führen den Beweis durch Induktion nach n.
<u>Induktionsanfang</u>: n = 1.

$$\text{Es gilt } \{e\} = G^{(n)} = (G,G),$$

also ist G kommutativ. Wie gerade bewiesen ist dann

$$[X, Y] = 0 \text{ für beliebige } X,Y \in T_eG,$$

d.h.

$$0 = [T_eG, T_eG] = \mathcal{D}^1\, T_eG.$$

Damit ist die Lie-Algebra T_eG auflösbar.

<u>Induktionsschritt</u>: n > 1.
Sei

$$H := G^{(1)} = (G, G).$$

Auf Grund von Aussage (i) gilt

$$\mathcal{D}^1 T_eH = [T_eG, T_eG] \subseteq T_eH = \mathcal{D}^0 T_eH$$

Auf Grund der Defintion der $\mathcal{D}^i$ folgt induktiv

---

[43] id ist hier die konstante Abbildung mit dem einzigen Wert id.

$$\mathcal{D}^{i+1}T_eG \subseteq \mathcal{D}^iT_eH \tag{1}$$

Auf Grund der Definiton von H und der Definition der iterierten Kommutatoren von Gruppen in 2.3.13A gilt für jede natürliche Zahl

$$H^{(i)} = G^{(i+1)},$$

also insbesondere

$$H^{(n-1)} = G^{(n)} = \{e\}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist T_eH auflösbar, d.h. es gibt eine natürliche Zahl m mit

$$\mathcal{D}^mT_eH = 0.$$

Zusammen mit (1) folgt

$$\mathcal{D}^{m+1}T_eG \subseteq \mathcal{D}^mT_eH = 0.$$

Also ist auch T_eG auflösbar.

QED.

4.4.15 Aufgabe 5: äußere Potenzen ***75***

Seien G eine lineare algebraische Gruppe über k, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $\phi: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$ eine rationale Darstellung. Definieren Sie die Darstellung

$$\wedge^h\phi: G \longrightarrow \mathbf{GL}(\wedge^hV),\ x \mapsto (\wedge^h\phi)(x)(v_1\wedge...\wedge v_h) := \phi(x)v_1\wedge...\wedge\phi(x)v_h$$

von G auf der äußeren Potenz $\wedge^hV$. Zeigen Sie, $\wedge^h\phi$ ist eine rationale Darstellung und es gilt

$$d(\wedge^h\phi)(X)(v_1\wedge...\wedge v_h) = \sum_{i=1}^{h} v_1\wedge...\wedge v_{i-1}\wedge(d\phi)(X)v_i\wedge v_{i+1}\wedge...\wedge v_h.$$

Beweis. 1. Schritt. $\wedge^h\phi$ ist eine rationale Darstellung.
Auf Grund des Anhangs "Tensoralgebra", 2.3.6 (ii) und (iii) ist

$$\wedge^h\phi: G \longrightarrow \mathbf{GL}(\wedge^hV),\ x \mapsto (\wedge^h\phi)(x)$$

ein Gruppen-Homomorphismus. Wir haben noch zu zeigen, $\wedge^h\phi$ ist eine reguläre Abbildung. Dazu fixierren wir eine Basis des k-Vektorraums V, sagen wir

$$e_1,...,e_m \in V.$$

Nach Anhang "Tensoralgebra", 2.3.7, bilden die Elemente

$$e_{i_1}\wedge...\wedge e_{i_h} \text{ mit } 1 \le i_1 < ... < i_h \le m \tag{1}$$

eine Basis von $\wedge^hV$. Wir haben $\wedge^h\phi$ mit Hilfe der Koordinaten bezüglich dieser Basen zu beschreiben. Sei

$$\begin{pmatrix} \phi_{11}(x) & \dots & \phi_{1m}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_{m1}(x) & \dots & \phi_{mm}(x) \end{pmatrix} \text{ mit } \phi_{ij} \in k[G]$$

die Matrix von $\phi(x)$ bezüglich der Basis der e_i , d.h.

$$\phi(x)\bullet e_i = \sum_{j=1}^{m} \phi_{ji}(x)\bullet e_j.$$

Dann gilt nach Definition von $\wedge^h\phi$

$$\wedge^h\phi(x)(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_h}) = \phi(e_{i_1})\wedge\ldots\wedge\phi(e_{i_\nu})\wedge\ldots\wedge\phi(e_{i_h})$$

$$= \Big(\sum_{j_1=1}^{m}\phi_{j_1 i_1}(x)\cdot e_{j_1}\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{j_\nu=1}^{m}\phi_{j_\nu i_\nu}(x)\cdot e_{j_\nu}\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{j_h=1}^{m}\phi_{j_n i_h}(x)\cdot e_{j_h}\Big)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m}\ \ldots \sum_{j_h=1}^{m}\phi_{j_1 i_1}(x)\cdot\ldots\cdot\phi_{j_n i_h}(x)\cdot e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_h}\,.$$

Falls die j_ν paarweise verschieden sind, bezeichnen wir mit $\pi_{j_1\ldots j_h}$ die Permutation der Menge $\{j_1,\ldots,j_{j_h}\}$ mit $\pi_{j_1\ldots j_h}(j_1) < \ldots < \pi_{j_1\ldots j_h}(j_h)$ und mit $\sigma_{j_1\ldots j_h}$ deren Vorzeichen. Falls die j_ν nicht paarweise verschieden sind, setzen wir

$$\sigma_{j_1\ldots j_h} = 0.$$

Weiter sei I_h die Menge der h-Tupel $(j_1, \ldots ,i_h)$ natürlicher Zahlen aus dem Intervall $[1,m]$ mit $j_1 < \ldots < j_h$. Damit erhalten wir

$$\wedge^h\phi(x)(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_h}) = \sum_{(j_1,\ldots,j_h)\in I_h}\phi_{i_1,\ldots,i_h}^{j_1,\ldots,j_h}(x)\cdot e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_h}$$

mit

$$\phi_{i_1,\ldots,i_h}^{j_1,\ldots,j_h}(x) = \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_h)\in I_h\\ \pi_{\alpha_1\ldots\alpha_h}(\alpha_\nu)=j_\nu}}\sigma_{\alpha_1\ldots\alpha_h}\,\phi_{\alpha_1 i_1}(x)\cdot\ldots\cdot\phi_{\alpha_n i_h}(x)$$

Wir sehen, die Einträge $\phi_{i_1,\ldots,i_h}^{j_1,\ldots,j_h}$ der Matrix von $\wedge^h\phi$ bezüglich der Basis (1) sind Polynome in den regulären Funktionen $\phi_{ij} \in k[G]$, also ebenfalls reguläre Funktionen von $k[G]$. Das bedeutet, $\wedge^h\phi$ ist eine reguläre Abbildung und damit eine rationale Darstellung.

2. <u>Schritt</u>. Bestimmung des Differentials von $\wedge^h\phi$.

Für jede k-lineare Abbildung $A: V \longrightarrow V$ betrachten wir das Diagramm von k-linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes h} & \xrightarrow{\omega_h} & \wedge^h V \\ A^{\otimes h}\downarrow & & \downarrow\wedge^h A \\ V^{\otimes h} & \xrightarrow{\omega_h} & \wedge^h V \end{array}$$

Dabei seien

$$\omega_h: V^{\otimes h} \longrightarrow \wedge^h V,\ v_1 \otimes ... \otimes v_h \mapsto v_1 \wedge ... \wedge v_h$$
$$A^{\otimes h}: V^{\otimes h} \longrightarrow V^{\otimes h},\ v_1 \otimes ... \otimes v_h \mapsto A(v_1) \otimes ... \otimes A(v_h)$$
$$\wedge^h A: \wedge^h V \longrightarrow \wedge^h V,\ v_1 \wedge ... \wedge v_h \mapsto A(v_1) \wedge ... \wedge A(v_h)$$

die Abbildungen aus dem Anhang "Tensoralgebra" von 2.3.1 (vgl. auch 2.3.4), 2.1.4 (ii) bzw. 2.3.6 (i). An den Abbildungsvorschriften lesen wir ab, das Diagramm ist kommutativ. Dieses Diagramm bietet uns die Möglichkeit, die rationalen Darstellungen

$$\phi^{\otimes h}: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V^{\otimes h})$$

(vgl. 4.4.14) und

$$\wedge^h \phi: G \longrightarrow \mathbf{GL}(\wedge^h V)$$

zu vergleichen.

Für $x \in G$ und $v_1,...,v_h$ gilt nach Definitoin von $\phi^{\otimes h}$

$$(\phi^{\otimes h}(x))(v_1 \otimes ... \otimes v_h) = \phi(v_1) \otimes ... \otimes \phi(v_h)$$

also

$$\begin{aligned} \omega_h((\phi^{\otimes h}(x))(v_1 \otimes ... \otimes v_h)) &= (\phi(x)v_1) \wedge ... \wedge (\phi(x)v_h) \\ &= \wedge^h \phi(x)(v_1 \wedge ... \wedge v_h) \\ &= \wedge^h \phi(x)(\omega_h(v_1 \otimes ... \otimes v_h)). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Abbildungen

$$\varphi_{\mathbf{v}}: \mathbf{GL}(V^{\otimes h}) \longrightarrow V^{\otimes h},\ f \mapsto f(\mathbf{v}),$$

für $\mathbf{v} \in V^{\otimes h}$ und

$$\psi_{\mathbf{w}}: \mathbf{GL}(\wedge^h V) \longrightarrow \wedge^h V,\ f \mapsto f(\mathbf{w}),$$

für $\mathbf{w} \in \wedge^h V$ können wir diese Identität wie folgt ausdrücken.

$$\omega_h \circ \varphi_{\mathbf{v}} \circ \phi^{\otimes h} = \psi_{\omega_n(\mathbf{v})} \circ \wedge^h \phi.$$

Wir gehen zu den Differentialen im neutralen Element über und erhalten

$$d\omega_h \circ d\varphi_{\mathbf{v}} \circ d(\phi^{\otimes h}) = d\psi_{\omega_h(\mathbf{v})} \circ d(\wedge^h \phi),$$

also

$$d\omega_h \circ d\varphi_{\mathbf{v}} \circ d(\phi^{\otimes h})(X) = d\psi_{\omega_h(\mathbf{v})} \circ d(\wedge^h \phi)(X) \text{ für jedes } X \in T_e G.$$

Weil die Abbildungen $\varphi_{\mathbf{v}}$, $\psi_{\mathbf{w}}$ und ω_h linear sind, stimmen sie mit ihren Differentialen überein (vgl. 4.1.10), d.h. wir können schreiben

$$\omega_h(\ (d(\phi^{\otimes h})(X)(\mathbf{v})\ ) = (d(\wedge^h \phi)(X))(\omega_h(\mathbf{v})) \text{ für } X \in T_e G \text{ und } \mathbf{v} \in V^{\otimes h}.$$

Speziell für $\mathbf{v} = v_1 \otimes ... \otimes v_h$ erhalten wir

$$(d(\wedge^h \phi)(X))(v_1 \otimes ... \otimes v_h) = \omega_h(\ (d(\phi^{\otimes h})(X)(v_1 \otimes ... \otimes v_h)\ )$$

$$= \omega_h\Big(\sum_{i=1}^{h} v_1\otimes\ldots\otimes v_{i-1}\otimes d\phi(X)(v_i)\otimes v_{i+1}\ldots\otimes v_h\Big) \qquad \text{(nach 4.4.14B(ii))}$$

$$= \sum_{i=1}^{h} v_1\wedge\ldots\wedge v_{i-1}\wedge d\phi(X)(v_i)\wedge v_{i+1}\ldots\wedge v_h \qquad \text{(nach Definition von } \omega_h\text{)}$$

Damit gilt auch die Aussage zum Differential von $\wedge^h\phi$.
QED.

4.4.15 Aufgabe 6: Ein Stabilisator *75*

Seien $s \in \mathbf{M}_n$ und $G := \{g \in \mathbf{GL}_n \mid gs({}^tg) = s\}$. Zeigen Sie, G ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$. Die Lie-Algebra L(G) ist enthalten in

$$\{X \in \mathbf{gl}_n \mid Xs + s({}^tX) = 0\}.$$

Beweis. 1. <u>Schritt</u>. G ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$.

Sei $s = (s_{ij})$ mit $s_{ij} \in k$. Dann kann man die Definition von G in der folgenden Gestalt aufschreiben.

$$G = \{\, x = (x_{ij}) \in \mathbf{GL}_n \mid \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} x_{i\alpha}s_{\alpha\beta}x_{j\beta} = s_{ij} \text{ für } i,j=1,\ldots,n\}.$$

Damit ist G durch polynomiale Gleichungen definiert, also abgeschlossen in $\mathbf{GL}_n$.

2. <u>Schritt</u>. $L(G) \subseteq \{X \in \mathbf{gl}_n \mid Xs + s({}^tX) = 0\}$.

Die Funktion

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} x_{i\alpha}s_{\alpha\beta}x_{j\beta} - s_{ij}: \mathbf{GL}_n \longrightarrow k,$$

ist identisch Null auf G. Also ist das Differential dieser Funktion auf T_eG gleich Null[44],

$$0 \qquad = d\Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} x_{i\alpha}s_{\alpha\beta}x_{j\beta} - s_{ij}\Big) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} dx_{i\alpha}s_{\alpha\beta}\delta_{j\beta} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \delta_{i\alpha}s_{\alpha\beta}dx_{j\beta}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} dx_{i\alpha}\cdot s_{\alpha j} + \sum_{\beta=1}^{n} s_{i\beta}\cdot dx_{j\beta}$$

Wir setzen den Vektor $X = \sum_{u,v=1}^{n} c_{uv}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{uv}}\Big|_e$ ein. Wegen

$$dx_{ij}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{uv}}\Big|_e\Big) = \frac{\partial}{\partial x_{uv}}\Big|_e\circ x_{ij}^*$$

$$=^{45} \frac{\partial}{\partial x_{uv}}\Big|_e(x_{ij}^*(T))$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_{uv}}\Big|_e(T\circ x_{ij})$$

[44] Es faktorisiert sich über den Tangentialraum des einpunktigen Raums.
[45] Wir identifizieren den Vektor von T_ek mit seiner einzigen Koordinate.

$$= \frac{\partial}{\partial x_{uv}}\Big|_e (x_{ij})$$

$$= \delta_{iu} \cdot \delta_{jv}$$

also

$$dx_{ij}(X) = \sum_{u,v=1}^{n} c_{uv} \cdot dx_{ij}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{uv}}\Big|_e\Big)$$

$$= \sum_{u,v=1}^{n} c_{uv} \cdot \delta_{iu} \cdot \delta_{jv}$$

$$= c_{ij}$$

erhalten wir

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{n} dx_{i\alpha}(X) \cdot s_{\alpha j} + \sum_{\beta=1}^{n} s_{i\beta} \cdot dx_{j\beta}(X)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} c_{i\alpha} \cdot s_{\alpha j} + \sum_{\beta=1}^{n} s_{i\beta} \cdot c_{j\beta}.$$

Es gilt also

$$0 = X \cdot s + s \cdot {}^tX$$

für jeden Vektor $X \in T_eG$, wie behauptet.

QED.

4.4.16 Der Frobenius-Morphismus 75

4.4.16A Bemerkung *75*

Als Anwendung der Ergebnisse dieses Kapitels werden wir einen grundlegenden Satz zu den algebraischen Gruppen über endlichen Körpern beweisen.

4.4.16B Definition und Eigenschaften *75*

Sei

$$F = \mathbb{F}_q$$

ein endlicher Körper mit q Elementen und der algebraischen Abschließung

$$k := \overline{F}.$$

Bemerkungen

(i) Es gilt

$$F = \{ a \in k \mid a^q = a \}.$$

(ii) Ist X eine affine F-Varietät, so ist

$$\sigma_F^*: F[X] \longrightarrow F[X],\ f \mapsto f^q,$$

ein F-Algebra-Homomorphismus, definiert also einen F-Morphismus

$$\sigma = \sigma_X: X \longrightarrow X,$$

welcher Frobenius-Morphismus von X heißt.

(iii) Der Frobenius-Morphismus ist ein funktorieller Morphismus, d.h. für jede reguläre über F definierte Abbildung

$$\phi: X \longrightarrow Y$$

ist das Diagramm von regulären über F definierten Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \sigma_X\downarrow & & \downarrow\sigma_Y \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

kommutativ.

(iv) Ist X eine abgeschlossene F-Teilvarietät des $\mathbb{A}^n$ und

$$x := (x_1,..., x_n) \in X\ (\subseteq \mathbb{A}^n)$$

ein Punkt, so gilt

$$\sigma(x) = (x_1^q,\ldots,x_n^q).$$

(v) Für jeden Punkt $x \in X$ ist das Differential des Frobenius-Morphismus im Punkt x identisch Null,

$$(d\sigma_x)(v) = 0$$

für beliebige $x \in X$ und beliebige $v\in T_xX$.

(vi) Die Menge der Fixpunkte

$$X^\sigma := \{x\in X \mid \sigma(x) = x\}$$

ist endlich.

(vii) Ähnliche Aussagen gelten für beliebige F-Varietäten. Der Frobenius-Morphismus einer nicht-notwendig affinen F-Gruppe G ist ein Endomorphismus von algebraischen Gruppen:

(a) Für jede F-Varietät X gilt es genau einen Morphismus

$$\sigma = \sigma_X: X \longrightarrow X,$$

der auf jeder affinen F-offenen Teilmenge $U \subseteq X$ mit dem Frobenius-Morphismus von U übereinstimmt (also ein F-Morphismus ist).

(b) Bemerkung (iii) gilt auch für nicht-notwendig affine F-Morphismus

$$\phi: X \longrightarrow Y,$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \sigma_X\downarrow & & \downarrow\sigma_Y \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

ist kommutativ.

(c) Bemerkung (v) gilt auch für nicht-notwendig affine F-Varietäten X, die Differentiale des Frobenius-Morphismus $\sigma: X \longrightarrow X$ sind in allen Punkten identisch Null,

$$d\sigma_x = 0 \text{ für jedes } x \in X.$$

(d) Bemerkung (vi) gilt auch für nicht-notwendig affine F-Varietäten X, die Menge der Fixpunkte des Frobenius-Morphismus

$$X^\sigma := \{x\in X \mid \sigma(x) = x\}$$

ist endlich.

(e) Für jede nicht-notwendig affine F-Gruppe G ist der Frobenius-Morpshimus

$$\sigma_G: G \longrightarrow G$$

ein über F definierter Homomorphismus von algebraischen Gruppen,

Beweis. Zu (i). Weil die multiplikative Gruppe von F die Ordnung q-1 hat, gilt $a^{q-1} = 1$ für jedes $a \in F-\{0\}$, also

$$a^q = a$$

für jedes $a \in F$. Die q Elemente von F sind also Nullstellen des Polynoms $T^q - T$. Da dieses Polynom höchstens q verschiedene Nullstellen besitzt, gibt es außer den Elementen von F keine weiteren Nullstellen.

Zu (ii). Die Ordung q des endlichen Körpers ist eine Potenz einer Primzahl p, sagen wir

$$q = p^s,$$

wobei p gerade die Charakteristik von F ist. Insbesondere gilt $(f+g)^p = f^p+g^p$ für beliebige $f, g \in F[X]$, also auch $(f+g)^q = f^q+g^q$. Damit ist

$$\overset{*}{\sigma}_F: F[X] \longrightarrow F[X],\ f \mapsto f^q,$$

ein Homomorphismus von Ringen mit 1. Nach Bemerkung (i) ist $\overset{*}{\sigma}_F$ linear über F, also ein Homomorphismus von F-Algebren. Wir wenden den Funktor $k\otimes_F$ und erhalten einen k-Algebra-Homomorphismus

$$k\otimes_F\overset{*}{\sigma}_F: k[G] = k\otimes_F F[X] \longrightarrow k\otimes_F F[X] = k[G],\ f \mapsto f^q,$$

Dieser ist der Homomorphismus der Koordinatenringe einer regulären Abbildung

$$\sigma: X \longrightarrow X$$

(vgl. Bemerkung 1.4.7(iii) und (vi)). Wegen $\sigma^* = k\otimes_F\overset{*}{\sigma}_F$ gilt

$$\sigma^*(F[X]) \subseteq F[X],$$

d.h. σ ist ein F-Morphismus (vgl. 1.4.9 (c)).

Zu (iii). Es reicht zu zeigen, das Diagramm von F-Algebra-Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} k[X] & \overset{\phi^*}{\longleftarrow} & k[Y] \\ \overset{*}{\sigma}_X \uparrow & & \uparrow \overset{*}{\sigma}_Y \\ k[X] & \overset{\phi^*}{\longleftarrow} & k[Y] \end{array}$$

ist kommutativ. Für $f \in k[Y]$ gilt

$$\begin{aligned} \phi^*(\overset{*}{\sigma}_Y(f)) &= \phi^*(f^q) && \text{(nach Definiton von } \overset{*}{\sigma}_Y) \\ &= \phi^*(f)^q && (\phi^* \text{ ist k-Algebra-Homomorphismus}) \\ &= \overset{*}{\sigma}_X(\phi^*(f)) && \text{(nach Definiton von } \overset{*}{\sigma}_X) \end{aligned}$$

Zu (iv). Wir betrachten die natürliche Einbettung

$$i: X \hookrightarrow \mathbb{A}^n,\ p \mapsto \begin{pmatrix} x_1(p) \\ \dots \\ x_n(p) \end{pmatrix}.$$

Nach Bemerkung (iii) erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}^n \\ \sigma_X\downarrow & & \downarrow\sigma_{\mathbb{A}^n} \\ X & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}^n \end{array}$$

Wir gehen zu den k-Algebra-Homomorphismen der Koordinatenringe über und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[x_1,...,x_n] & \xleftarrow{i^*} & k[T_1,...,T_n] \\ \sigma_X^*\uparrow & & \uparrow\sigma_{\mathbb{A}^n}^* \\ k[x_1,...,x_n] & \xleftarrow{i^*} & k[T_1,...,T_n] \end{array}$$

Insbesondere gilt für j = 1,...,n:

$$\begin{aligned} x_j\circ\sigma_X &= \sigma_X^*(x_j) \\ &= \sigma_X^*(T_j\circ i) && \text{(nach Definition von i)} \\ &= \sigma_X^*(i^*(T_j)) \\ &= i^*(\sigma_{\mathbb{A}^n}^*(T_j)) && \text{(Kommutativität des Diagramms)} \\ &= i^*((T_j)^q) && \text{(nach Definiton von } \sigma_{\mathbb{A}^n}^*) \\ &= (i^*T_j)^q && \text{(i* ist k-Algebra-Homomorphismus)} \\ &= (x_j)^q \end{aligned}$$

Die j-te Koordinten-Funktion von σ_X ist also $(x_j)^q$, d.h. es ist

$$\sigma_X(p) = \begin{pmatrix} x_1^q(p) \\ \cdots \\ x_n^q(p) \end{pmatrix}$$

wie behauptet.

Zu (v). Für jede Funktion $f \in k[X]$, jeden Punkt $x \in X$ und jeden Tangentialvektor

$$v \in T_eX = Der_k(k[X], k_x)$$

gilt

$$\begin{aligned} ((d\sigma_x)(v))(f) &= (v\circ\sigma^*)(f) \\ &= v(f^q) \\ &= q\bullet f^{q-1}(x)\bullet v(f9 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt weil k eine positive Charakteristik p besitzt und q eine Potenz von p ist.

Zu (vi). Wir können annehmen, X ist abgeschlossene Teilvarietät des $\mathbb{A}^n$. Mit den Bezeichnungen von Bemerkung (iii) gilt dann

$$X^\sigma = \{ \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix} \in X \mid \begin{pmatrix} p_1^q \\ \dots \\ p_n^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix} \}$$

$$= \{ \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix} \in X \mid p_j^q = p_j \text{ für } j = 1,\dots,n \}$$

$$= X \cap F^n \qquad \text{(nach Bemerkung (i))}$$

Dieser Durchschnitt ist endlich, weil F^n ist.

Zu (vii). Beweis von (a). Es reicht zu zeigen, für je zwei affine F-offene Teilmengen

$$U, V \subseteq X$$

stimmen die Frobenius-Morphismen von U und V auf $U \cap V$ überein. Dazu reicht es zu zeigen, für jede affine F-offene Teilmenge W des Durchschnitts, stimmen die Einschränkungen der Frobenius-Morphismen von U und V auf W mit dem Frobenius-Morphismus von W überein. Mit anderen Worten, wir können annehmen,

$$U \subseteq V \text{ und } V = X.$$

In dieser Situation ist die Aussage aber ein Spezialfall von Bemerkung (iii).

Beweis von (b). Wir haben die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \sigma_X \downarrow & & \downarrow \sigma_Y \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

für beliebige nicht-notwendig affine F-Morphismen ϕ zu beweisen,

$$\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi.$$

Weil die affinen F-offenen Mengen die F-Varietät Y überdecken, überdecken deren vollständige Urbilder bei ϕ die F-Varietät X. Es reicht also zu zeigen, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \phi^{-1}(V) & \xrightarrow{\phi} & V \\ \sigma_{\phi^{-1}(V)} \downarrow & & \downarrow \sigma_V \\ \phi^{-1}(V) & \xrightarrow{\phi} & V \end{array}$$

ist kommutativ für jede affine F-offene Teilmengen V von Y. Wir können also annehmen,

Y ist affin.

Weil die affinen F-offenen Mengen die F-Varietät X überdecken, reicht es zu zeigen

$$\phi \circ \sigma_X|_U = \sigma_Y \circ \phi\,|_U$$

für jede affine F-offene Teilmenge U von X, d.h. wir können annehmen,

X und Y sind affin.

Im affinen Fall gilt die Aussage aber nach Bemerkung (iii).

Beweis von (c). Sei

$$\sigma: X \longrightarrow X$$

der Frobenius-Morphismus der nicht-notwendig affinen Varietät X. Sei $x \in X$ vorgegeben und $y = \sigma(x)$. Wir wählen eine affine offene Umgebung $V \subseteq Y$ von y und eine affine offene Umgebung $U \subseteq \sigma^{-1}(V)$ von x und betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \uparrow i & & \uparrow j \\ U & \xrightarrow{\sigma|_U} & V \end{array}$$

Dabei sollen i und j die natürlichen Einbettungen sein. Die Einschränkung von $\sigma|_U$ ist nach Definition von σ gerade der Frobenius-Morphismus von U. Insbesondere gilt

$$\sigma(U) \subseteq U,$$

also

$$\sigma(U) \subseteq U \cap V,$$

also

$$\sigma(U \cap V) \subseteq U \cap V.$$

Wir können also annehmen,

$$U = V.$$

Wir gehen zu den Differentialen in x über und erhalten das kommutative Diagramm von k-linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} T_x X & \xrightarrow{d\sigma} & T_y Y \\ \cong\uparrow di & & \cong\uparrow dj \\ T_x U & \xrightarrow{d(\sigma|_U)} & T_y U \end{array}$$

Man beachte, die Differentiale der offenen Einbettungen i und j sind bijektiv (vgl. 4.1.7). Weil U affin ist, ist $d(\sigma|_U)$ nach Bemerkung (v) identisch Null. Dann gilt dasselbe aber auch für $d\sigma$.

Beweis von (d). Als Varietät ist X insbesondere eine Prävarietät (vgl. 1.6.9), also quasi-kompakt (vgl. 1.6.1). Damit besitzt X eine Überdeckung durch endlich viele affine F-offene Teilmengen, sagen wir

$$X = U_1 \cup \dots \cup U_r.$$

Insbesondere gilt

$$X^\sigma = (U_1)^{\sigma|U_1} \cup \dots \cup (U_r)^{\sigma|U_r}.$$

Nun ist aber die Einschränkung von σ auf U_i nach Definition gerade der Frobenius-Morphismus von U_i. Nach Bemerkung (vi) ist damit

$$(U_i)^{\sigma|U_i}$$

für i = 1,..., r endlich. Dann ist aber auch X^σ als Vereinigung endlich vieler endlicher Mengen ebenfalls endlich.

Beweis von (e). Über F definiert ist

$$\sigma = \sigma_G$$

nach (a). Wir haben zu zeigen, es ist ein Gruppen-Homomorphismus, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ \sigma\times\sigma\downarrow & & \downarrow\sigma \\ G\times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

ist kommutativ, wobei μ die Gruppen-Multiplikation bezeichne. Seien

$$u, v \in G \text{ und } w := u\bullet v.$$

Weil die affinen F-offenen Teilmengen von G die Gruppe G überdecken und die F-offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis der F-Topologie von G bilden, können wir affine F-offene Teilmengen U, V und W von G finden mit

$$w \in W \subseteq G$$

und

$$(u, v) \subseteq U\times V \subseteq \mu^{-1}(W).$$

Wir haben die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} U\times V & \xrightarrow{\mu|_{U\times V}} & W \\ \sigma_U\times\sigma_V\downarrow & & \downarrow\sigma_W \\ U\times V & \xrightarrow{\mu|_{U\times V}} & W \end{array}$$

zu beweisen. Wir können zu den induzierten k-Algebra-Homomorphismen der Koordinatenringe übergehen und erhalten ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[U]\otimes_k k[V] & \xleftarrow{\Delta} & k[W] \\ \overset{*}{\sigma}_U\otimes\overset{*}{\sigma}_V\uparrow & & \uparrow\overset{*}{\sigma}_W \\ k[U]\otimes_k k[V] & \xleftarrow{\Delta} & k[W] \end{array} \tag{1}$$

mit

$$\Delta := \mu|^{*}_{U\times V}.$$

dessen Kommutativität zu beweisen ist.

Sei $f \in k[W]$. Dann kann man $\Delta(f)$ in der Gestalt

$$\Delta(f) = \sum_i f_i\otimes g_i \text{ mit } f_i\in k[U] \text{ und } g_i\in k[V]$$

schreiben. Weil Δ ein k-Algebra-Homomorphismus ist und q eine Potenz der Charakteristik p des Körper k, erhalten wir

$$\Delta(f^q) = (\Delta(f))^q = \sum_i (f_i)^q\otimes(g_i)^q, \tag{2}$$

also

$$(\overset{*}{\sigma}_U\otimes\overset{*}{\sigma}_V)(\Delta(f)) \quad = \sum_i \overset{*}{\sigma}_U(f_i)\otimes \overset{*}{\sigma}_V(g_i)$$

$= \sum_i (f_i)^q \otimes (g_i)^q$ (nach Definiton von $\overset{*}{\sigma}_U$ und $\overset{*}{\sigma}_V$)

$= \Delta(f^q)$ (nach (2))

$= \Delta(\overset{*}{\sigma}_W(f))$.

Wir haben gezeigt, das Diagramm (1) ist kommutativ, d.h. σ ist ein über F definierter Homomorphismus von algebraischen Gruppen.
QED.

4.4.17 Satz von Lang 76

4.4.17A Formulierung des Satzes *76*

Seien

$$F := \mathbb{F}_q$$

der endliche Körper mit q Elementen, k die algebraischen Abschließung von F,

$$k := \overline{F},$$

und G eine (nicht-notwendig affine) zusammenhängende F-Gruppe.

Dann ist die Abbildung

$$\wedge : G \longrightarrow G,\ x \mapsto (\sigma x)\bullet x^{-1},$$

wobei σ den Frobenius-Morphismus von G bezeichne, regulär, über F definiert und surjektiv.

4.4.17B Surjektivitätskriterium

Seien G eine (nicht-notwendig affine) zusammenhängende Gruppe. Weiter sei

$$\sigma: G \longrightarrow G$$

ein Homomorphismus algebraischer Gruppen mit der Eigenschaft, daß für jedes $b \in G$ alle Differentiale der Abbildung

$$f_b: G \longrightarrow G,\ x \mapsto \sigma(x)\bullet b\bullet x^{-1},$$

bijektiv sind. Dann ist die Abbildung

$$f_e: G \longrightarrow G,\ x \mapsto \sigma(x)\bullet x^{-1},$$

surjektiv.
Beweis. Sei

$$b \in G$$

beliebig vorgegeben und

$$X_b := \overline{f_b(G)}$$

die Abschließung des Bildes von f_b in G. Weil G zusammenhängend also irreduzibel ist, sind die Mengen

$$f_b(G) \text{ und } X_b \text{ irreduzibel}$$

(nach 1.2.3). Nach 1.9.5 enthält X_b eine nicht-leere offene Teilmenge, die ganz im Bild von f_b liegt, sagen wir

$$U_b \subseteq f_b(G) \text{ mit } U_b \text{ nicht-leer und offen in } X_b.$$

Außerdem ist die Menge der nicht-singulären Punkte von X_b nicht-leer und offen in X_b (nach 4.3.3B (ii)). Weil Y irreduzibel ist, hat diese Menge mit U_b einen nicht-leeren Durchschnitt. Deshalb enthält $f_b(G)$ einen nicht-singulären Punkt von X_b, sagen wir,

$$\xi \in G,\ f_b(\xi) \text{ ist nicht-singulärer Punkt von } X_b.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \dim X_b &= \dim T_{f_b(\xi)} X_b && \text{(denn } f_b(\xi) \text{ ist nicht-singulärer Punkt von } X_b\text{)} \\ &= \dim T_\xi G && \text{(denn } (df_b)_\xi \text{ ist bijektiv)} \\ &= \dim G && \text{(denn G ist glatt nch 4.3.7(i)).} \end{aligned}$$

Wegen $X_b \subseteq G$ und G irreduzibel folgt

$$X_b = G$$

(nach 1.8.2). Damit ist die Teilmenge U_b von $f_b(G)$ offen in G. Wir haben damit für jedes $b \in G$ eine nicht-leere Teilmenge $U_b \subseteq f_b(G)$ konstruiert, die offen ist in G. Weil G irreduzibel ist, ist für jedes $b \in G$ der Durchschnitt

$$U_b \cap U_e \neq \emptyset$$

nicht leer. Für jedes $b \in G$ gibt es damit Punkte $x_b, y_b \in G$ mit

$$f_b(x_b) = f_e(y_e),$$

d.h. mit

$$\sigma(x_b)\bullet b\bullet x_b^{-1} = \sigma(y_b)\bullet y_b^{-1},$$

also mit

$$\begin{aligned} b \in \sigma(x_b)^{-1}\bullet\ \sigma(y_b)\bullet y_b^{-1}\bullet x_b \\ &= \sigma(x_b^{-1}\bullet y_b)\bullet(x_b^{-1}\bullet y_b)^{-1} \\ &= f_e(x_b^{-1}\bullet y_b) \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, jeder Punkt $b \in G$ liegt im Bild von f_e, d.h. f_e ist surjektiv.

QED.

4.4.17C Beweis des Satzes ***76***

Nach 4.4.17B reicht es zu zeigen, für jedes $b \in G$ sind die Differentiale der Abbildung

$$f_b: G \longrightarrow G,\ x \mapsto \sigma(x)\bullet b\bullet x^{-1},$$

bijektiv.

Sei $a \in G$. Wir betrachten die Abbildung

$$f'_b = f_b \circ R_{a^{-1}}: G \longrightarrow G,\ x \mapsto xa \mapsto f_b(xa) = \sigma(xa)\bullet b\bullet(xa)^{-1}$$

Es gilt

$$f'_b(x) \quad = \sigma(x)\bullet\sigma(a)\bullet b\bullet a^{-1}\bullet x^{-1} = \tau(x)\bullet x^{-1}$$

mit

$$\tau(x) \quad = \sigma(xa)\bullet b\bullet a^{-1}$$

$$= R_{ab^{-1}}(\sigma(R_{a^{-1}}(x)))$$
$$= (R_{ab^{-1}}\circ\sigma\circ R_{a^{-1}})(x)$$

d.h.

$$\tau = R_{ab^{-1}}\circ\sigma\circ R_{a^{-1}}.$$

Es folgt

$$(df_b)_e = (d\tau)_e - id \qquad \text{(nach 4.4.13(i))}$$
$$= (R_{ab^{-1}})_{\sigma(a)}\circ(d\sigma)_a\circ(dR_{a^{-1}})_e - id$$
$$= (R_{ab^{-1}})_e\circ 0\circ(dR_{a^{-1}})_e - id \qquad \text{(nach Bem. 4.4.16B(vii)(c))}$$
$$= -id$$

Wir haben gezeigt,

$$(df'_b)_e \text{ ist bijektiv.}$$

Wegen $f'_b = f_b\circ R_{a^{-1}}$ (nach Definition) folgt

$$(d\,f'_b)_e = (df_b)_a \circ(dR_{a^{-1}})_e$$

Weil $(d\,f'_b)_e$ und $(dR_{a^{-1}})_e$ bijektiv sind, ist es auch $(df_b)_a$ - für jedes $a \in G$.

QED.

4.4.18 Aufgaben 76

4.4.18 Aufgabe 1 ***76***

Seien

$$F := \mathbb{F}_q$$

der endliche Körper mit q Elementen, k die algebraischen Abschließung von F,

$$k := \overline{F},$$

und G eine (nicht-notwendig affine) zusammenhängende F-Gruppe,

$$\sigma: G \longrightarrow G,\ x \mapsto x^q,$$

der Frobenius-Morphismus von G,

$$G^\sigma = \{x\in G \mid \sigma(x) = x\}$$

die Menge der Fixpunkte von σ, und

$$Z(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$$

der Zentralisator des Punktes $a \in G^\sigma$. Zeigen Sie,

(i) Z(a) ist eine abgeschlossene Untergruppe von G, welche σ-stabil ist.

(ii) Ist Z(a) zusammenhängend und $b \in G^\sigma$ konjugiert zu a in G, so ist b sogar konjugiert zu a in der endlichen Gruppe G^σ.

(weitere Einzelheiten in diesem Kontext findet man in Borel [2], Teil E).

Beweis. Zu (i). Wir können annehmen, G ist eine abgeschlossene Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathbf{GL}_n$. Die definierende Bedingung

$$xa = ax$$

bedeutet dann, das für beliebige i und j die Einträge in der Position (i,j) der beiden Matrizenprodukte gleich sind, d.h.

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_{i\alpha}\bullet a_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\bullet x_{\alpha j}.$$

Dies sind polynomiale Gleichungen in den Einträgen von x, d.h. Z(a) ist abgeschlossen in G.

Wir haben noch zu zeigen, Z(a) ist σ-stabil. Für $x \in Z(a)$ gilt

$$xa = ax,$$

also

$$\sigma(x)\bullet\sigma(a) = \sigma(a)\bullet\sigma(x).$$

Wegen $a \in G^\sigma$ gilt $\sigma(a) = a$, also

$$\sigma(x)\bullet a = a\bullet\sigma(x),$$

also $\sigma(x) \in Z(a)$. Wir haben gezeigt, Z(a) ist σ-stabil.

Zu (ii). (vgl. Borel [2], Teil E, §2)

1. Schritt. Sei

$$M := \{xax^{-1} \mid x \in G\}$$

die Konjugationsklasse von $a \in G^\sigma$. Dann gilt

(a) G operiert transitiv auf M durch Konjugation,

$$G \times M \longrightarrow M,\ (g,m) \mapsto g\circ m := \sigma_g(m) = g\bullet m\bullet g^{-1}.$$

(b) $\sigma(M) \subseteq M$.

(c) $M^\sigma := \{m \in M \mid \sigma(m) = m\}$ ist nicht leer.

(d) G^σ operiert auf M^σ.

Bemerkung. Die zu beweisende Aussage (ii) bedeutet gerade, daß G^σ transitiv auf M^σ operiert, d.h. die Menge $G^\sigma \backslash M^\sigma$ der Orbits dieser Operation besteht aus nur einem Element,

$$\# G^\sigma \backslash M^\sigma = 1.$$

Zu (a). Für $m = xax^{-1} \in M$ gilt

$$g\circ m = g\bullet m\bullet g^{-1} = g\bullet xax^{-1}\bullet g^{-1} = (gx)\bullet a\bullet(gx)^{-1} \in M.$$

Ist $m' = x'ax'^{-1}$ ein zweites Element aus M, sog gilt speziell für $g := x'\bullet x^{-1}$:

$$\begin{aligned} g\circ m &= (gx)\bullet a\bullet(gx)^{-1} \\ &= (x'x^{-1}x)\bullet a\bullet(x'x^{-1}x) \quad \text{(nach Definiton von g)} \\ &= x'\bullet a\bullet x'^{-1} \\ &= m', \end{aligned}$$

d.h. G operiert transitiv.

Zu (b). Für $m = xax^{-1} \in M$ gilt

$$\begin{aligned} \sigma(m) &= \sigma(xax^{-1}) && \text{(Definition von a)} \\ &= \sigma(x)\bullet\sigma(a)\bullet\sigma(x)^{-1} && (\sigma \text{ ist Gruppen-Homomorphismus}) \\ &= \sigma(x)\bullet a\bullet\sigma(x)^{-1} && (a \in G^\sigma) \\ &\in M && \text{(nach Definition von M).} \end{aligned}$$

Zu (c). Wegen $a \in M$ und $\sigma(a) = a$, gilt $a \in M^\sigma$.

Zu (d). Für $m \in M^{\sigma}$ und $g \in G^{\sigma}$ gilt $\sigma(m) = m$ und $\sigma(g) = g$ und

$$\begin{aligned}
\sigma(g\circ m) &= \sigma(g\bullet m\bullet g^{-1}) && \text{(Definition der Operation von G auf M)}\\
&= \sigma(g)\bullet\sigma(m)\bullet\sigma(g)^{-1} && (\sigma \text{ ist Gruppen-Homomorphismus})\\
&= g\bullet m\bullet g^{-1} && (\text{wegen } g\in G^{\sigma} \text{ und } m\in M^{\sigma})\\
&= g\circ m && \text{(Definition der Operation von G auf M).}
\end{aligned}$$

Damit gilt $g\circ m \in M^{\sigma}$.

2. Schritt. Für jede Gruppe A und jeden Gruppen-Homomorphismuis $\sigma:A\longrightarrow A$ sei

$$H^1(\sigma, A) := A/\sim$$

die Menge der Äquivalenz-Klassen von A bezüglich der Relation

$$a' \sim a'' \Leftrightarrow \text{Es gibt ein } c \in A \text{ mit } a'' = ca'\sigma(c)^{-1}.$$

Diese Definition ist korrekt, d.h. '$\sim$' ist eine Äquivalenz-Relation.

Sei

$$f_c(x) := c\bullet x\bullet\sigma(c)^{-1}.$$

Dann gilt

$$a' \sim a'' \Leftrightarrow \text{Es gibt ein } c\in A \text{ mit } a'' = f_c(a').$$

Die Relation ist reflexiv, wegen $f_e = id$.

Die Relation ist transitiv, wegen

$$\begin{aligned}
f_{c'}(f_{c''}(x)) &= c'\bullet(c''\bullet x\bullet\sigma(c'')^{-1})\bullet\sigma(c')^{-1}\\
&= (c'c'')\bullet x\bullet(\sigma(c')\sigma(c''))^{-1}\\
&= (c'c'')\bullet x\bullet(\sigma(c'c''))^{-1}\\
&= f_{c'c''}(x),
\end{aligned}$$

d.h.

$$f_{c'}\circ f_{c''} = f_{c'c''}.$$

Die Relation ist anti-symmetrisch, wegen

$$f_c\circ f_{c^{-1}} = f_e = id, \text{ d.h. } f_{c^{-1}} = f_c^{-1}$$

Bemerkung. Zwei Elemente a' aund a'' von A sind genau dann äquivalent, wenn sie im selben Orbit der Operation

$$A \times A \longrightarrow A,\ (c, a) \mapsto f_c(a),$$

liegen.

3. Schritt. Sei A eine σ-stabile abgeschlossene Untergruppe von G (wie zum Beispiel A = Z(a)). Dann induziert der natürliche Homomorphismus $\rho:A \twoheadrightarrow A/A^0$ eine surjektive Abbildung

$$H^1(\sigma, A) \twoheadrightarrow H^1(\sigma, A/A^0) \qquad (1)$$
$$[a] \mapsto [\rho(a)]$$

Bemerkung 1: $H^1(\sigma, A/A^0)$ ist wohldefiniert.

Weil σ eine reguläre Abbildung ist, ist $\sigma(A^0)$ zusammenhängend. Weil σ ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt $e \in \sigma(A^0)$. Zusammen erhalten wir

$$\sigma(A^0) \subseteq A^0.$$

Insbesondere liegt A^0 im Kern der Zusammensetzung

$$A \xrightarrow{\sigma} A \xrightarrow{\rho} A/A^0.$$

Diese Zusammensetzung faktorisiert sich also über A/A^0. Es gibt genau einen Gruppen-Homomorphismus $\bar\sigma$: $A/A^0 \longrightarrow A/A^0$, für welchen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & A \\ \downarrow\!\!\downarrow \rho & & \downarrow\!\!\downarrow \rho \\ A/A^0 & \xrightarrow{\bar\sigma} & A/A^0 \end{array} \qquad (2)$$

kommutativ ist. Damit induziert die Operation von σ auf der σ-stabilen Untergruppe A eine Operation auf A/A^0 und

$$H^1(\sigma, A/A^0) := H^1(\bar\sigma, A/A^0)$$

ist wohldefiniert.

Bemerkung 2. Die Abbildung (1) ist wohldefiniert.

Seien a und b äquivalent in A. Dann gibt es ein $c \in A$ mit

$$a = c\bullet b\bullet\sigma(c)^{-1}.$$

Wir wenden den natürlichen Homomorphismus

$$\rho: A \twoheadrightarrow A/A^0$$

an und erhalten

$$\begin{aligned} \rho(a) &= \rho(c)\bullet\ \rho(b)\bullet\ \rho(\sigma(c))^{-1}. \\ &= \rho(c)\bullet\ \rho(b)\bullet\bar\sigma(\rho(c)))^{-1}, \end{aligned}$$

d.h. $\rho(a)$ und $\rho(b)$ sind äquivalent in A/A^0. Die Äquivalenzklasse

$$[\rho(a)]$$

von $\rho(a)$ hängt nur von der Äquivalenzklasse von a ab. Wir haben gezeigt die Abibldung

$$H^1(\sigma, A) \longrightarrow H^1(\sigma, A/A^0), [a] \mapsto [\rho(a)],$$

ist korrekt definiert.

Bemerkung 3. Die Abbildung (1) ist surjektiv.

Jedes Element von $H^1(\sigma, A/A^0)$ hat die Gestalt

$$[\rho(a)] \text{ mit } a \in A.$$

Dieses Element ist das Bild der Äquivalenzklasse $[a] \in H^1(\sigma, A)$ bei der Abbildung (1).

4. Schritt. Die Surjektion des dritten Schritts ist sogar bijektiv,

$$H^1(\sigma, A) \xrightarrow{\cong} H^1(\sigma, A/A^0).$$

Wir haben noch zu zeigen, (1) ist injektiv.

Seien $a, b \in A$ zwei Elemente, deren Äquivalenzklassen

$$[a], [b] \in H^1(\sigma, A)$$

dasselbe Bild bei (1) haben. Wir haben zu zeigen,

$$[a] = [b].$$

Dabei können wir bei Bedarf, das Element b durch ein (in A) äquivalentes Element ersetzen.

Nach Voraussetzung gibt es ein $c \in A$ mit

$$\rho(a) = \rho(c)\bullet\rho(b)\bullet\ \bar\sigma(\rho(c))^{-1}$$

$= \rho(c)\bullet\rho(b)\bullet \rho(\sigma(c))^{-1}$ (weil (2) kommutativ ist)

$= \rho(c\bullet b\bullet\sigma(c)^{-1})$

Wir können b durch das äquivalente Element $c\bullet b\bullet\sigma(c)^{-1}$ ersetzen, also annehmen, es gilt

$$\rho(a) = \rho(b),$$

also

$$ab^{-1} \in \mathrm{Ker}(\rho) = A^0 \quad (3)$$

Nach dem Satz 4.4.17 von Lang gibt es ein Elment $g \in G$ mit

$$b = g^{-1}\bullet\sigma(g). \quad (4)$$

(also $gb = \sigma(g)$ und $\sigma(g)^{-1} = b^{-1}g^{-1}$)

Weil A nach Voraussetzung σ-stabil ist, ist $\sigma(A^0)$ eine zusammenhängende Untergruppe von A (welche das neutrale Element enthält), also in A^0 liegt,

$$\sigma(A^0) \subseteq A^0. \quad (5)$$

<u>Bemerkung 1</u>: Mit $f(x) := x\bullet\sigma(x)^{-1}$ gilt $f(gA^0g^{-1}) \subseteq gA^0g^{-1}$.

Nach Definition von f gilt

$f(gA^0g^{-1}) \subseteq gA^0g^{-1}\bullet\sigma(gA^0g^{-1})^{-1}$

$\subseteq gA^0g^{-1}\bullet\sigma((gA^0g^{-1})^{-1})$ (σ ist Gruppen-Homomorphismus)

$\subseteq gA^0g^{-1}\bullet\sigma(g\bullet(A^0)^{-1}\bullet g^{-1})$

$\subseteq gA^0g^{-1}\bullet\sigma(g\bullet A^0\bullet g^{-1})$ (A^0 ist eine Untergruppe von G)

$\subseteq gA^0g^{-1}\bullet\sigma(g)\bullet\sigma(A^0)\bullet\sigma(g)^{-1}$

$\subseteq gA^0g^{-1}\bullet gb\bullet A^0\bullet b^{-1}g^{-1}$ (wegen (4) und (5))

$\subseteq gA^0\bullet b\bullet A^0\bullet b^{-1}g^{-1}$

$\subseteq gA^0\bullet A^0\bullet g^{-1}$ (A^0 ist Normalteiler in A und $b\in A$)

$\subseteq gA^0g^{-1}$ (A^0 ist eine Untergruppe).

Damit ist Bemerkung 1 bewiesen.

<u>Bemerkung 2</u>: Es gilt $\sigma(gA^0g^{-1}) \subseteq gA^0g^{-1}$.[46]

Für jedes $x \in gA^0g^{-1}$ gilt nach Bemerkung 1

$$f(x) \in gA^0g^{-1},$$

also

$$f(x)^{-1} \in gA^0g^{-1}$$

(weil gA^0g^{-1} eine Gruppe ist), also

$$f(x)^{-1}\bullet x \in gA^0g^{-1}\bullet gA^0g^{-1} \subseteq gA^0g^{-1}.$$

Nach Definition von f ist aber $f(x) = x\bullet\sigma(x)^{-1}$, also $f(x)\bullet\sigma(x) = x$, also

$$\sigma(x) = f(x)^{-1}\bullet x \in gA^0g^{-1}.$$

Damit ist Bemerkung 2 bewiesen.

<u>Bemerkung 3</u>: Es gilt $f(gA^0g^{-1}) = gA^0g^{-1}$,

---

[46] Weil der Frobenius-Morphismus F-Gruppen in F-Gruppen abbildet, besteht diese Inklusion für F-Gruppen gA^0g^{-1} trivialerweise.

Nach Bemerkung 2 ist die Einschränkung von σ auf gA^0g^{-1} ein Homomorphismus

$$\sigma': gA^0g^{-1} \longrightarrow gA^0g^{-1}$$

linearer algebraischer Gruppen. Nach 4.4.17B reicht es zu zeigen, daß für jedes

$$b' \in gA^0g^{-1}$$

alle Differentiale der Abbildung

$$f'_{b'}: gA^0g^{-1} \longrightarrow gA^0g^{-1},\ x \mapsto \sigma'(x)\bullet b'\bullet x\ gA^0g^{-1},$$

bijektiv sind. Zum Beweis betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f_{b'}"] & G \\ gA^0g^{-1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "f'_{b'}"] & gA^0g^{-1} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

dessen vertikale Abbildungen die natürlichen Einbettungen sind und gehen zu den Differentialen in den Punkten a' von gA^0g^{-1} über. Wir erhalten die kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} T_{a'}G \arrow[r, "(df_{b'})_{a'}"] & T_{f'_{b'}(a')}G \\ T_{a'}(gA^0g^{-1}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "(df'_{b'})_{a'}"] & T_{f'_{b'}(a')}(gA^0g^{-1}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Auf Grund des Beweises 4.4.17C des Satzes von Lang ist die obere horizontale Abbildung bijektiv.[47] Dann ist aber die unter horizontale Abbildung zumindest injektiv. Als k-lineare Abbildung zwischen Vektorräumen derselben endlichen Dimension muß sie dann aber sogar bijektiv sein. Die Aussage von Bemerkung 3 ist damit eine Folge von Lemma 4.4.17B.

Bemerkung 4. Es gilt [a] = [b] (d.h. es gilt die Aussage des vierten Schritts).
Nach (3) gilt

$$gab^{-1}g^{-1} \in gA^0g^{-1}.$$

Nach Bemerkung 3 gibt es ein $c\in A^0$ nut

$$f(gcg^{-1}) = gab^{-1}g^{-1}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} gab^{-1}g^{-1} &= (gcg^{-1})\sigma(gcg^{-1})^{-1} \\ &= (gcg^{-1})\sigma((gcg^{-1})^{-1}) && (\sigma \text{ ist Gruppen-Homomorphismus}) \\ &= (gcg^{-1})\sigma(gc^{-1}g^{-1}) \\ &= (gcg^{-1})\sigma(g)\sigma(c^{-1})\sigma(g)^{-1} \\ &= gcg^{-1}\bullet gb\bullet\sigma(c)^{-1}\bullet b^{-1}g^{-1} && (\text{wegen } (4)) \\ &= gcb\bullet\sigma(c)^{-1}\bullet b^{-1}g^{-1} \end{aligned}$$

also

$$ab^{-1} = cb\bullet\sigma(c)^{-1}\bullet b^{-1}$$

also

$$a = cb\bullet\sigma(c)^{-1}$$

Mit andern Worten, a und b sind äquivalent.

---

[47] Wir benutzen hier nicht den Satz von Lang, sondern die Tatsache, daß wir den Satz bewiesen haben durch den Nachweis, daß die Bedingungen von Lemma 4.4.17B erfüllt sind.

5. Schritt. Es gibt eine bijektive Abbildung

$$G^\sigma\backslash M^\sigma \xrightarrow{\cong} H^1(\sigma, Z(a)) \tag{6}$$

von der Menge $G^\sigma\backslash M^\sigma$ der Orbits der im ersten Schritt definierten Operation von G^σ auf M^σ mit Werten in der im zweiten Schritt definierten Menge $H^1(\sigma, Z(a))$.
(vgl. Borel [2], Teil E, §2, Aussage 2.7 (b))

Konstruktion der Abbildung (6). Nach Wahl von $a \in G^\sigma$ gilt

$$a \in M^\sigma.$$

Seien

$$O(m) \in G^\sigma\backslash M^\sigma$$

ein vorgegebenes Orbit und $m \in M^\sigma$ ($\subseteq M \subseteq G$) ein Element dieses Orbits. Weil G transitiv auf der Konjugationsklasse M von a operiert, gibt es ein $g \in G$ mit

$$g \circ a = m.$$

Wir wenden σ an und erhalten

$$\sigma(g) \circ \sigma(a) = \sigma(m)$$

und wegen $a \in M^\sigma$ auch

$$\sigma(g) \circ a = \sigma(m) \tag{7}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (g^{-1}\sigma(g)) \circ a &= g^{-1} \circ \sigma(m) && \text{(nach (7))} \\ &= g^{-1} \circ m && (\text{wegen } m \in M^\sigma) \\ &= g^{-1} \circ g \circ a && \text{(nach Wahl von g)} \\ &= a, \end{aligned}$$

also nach Definition der Operation "$\circ$":

$$(g^{-1}\sigma(g)) \bullet a \bullet (g^{-1}\sigma(g))^{-1} = a$$

also

$$g^{-1}\sigma(g) \in Z(a).$$

Für $x \in Z(a)$ bezeichnen wir mit $[x]$ die Äquivalenzklasse von A in $H^1(\sigma, Z(a))$.
Abbildung (6) sei wie folgt definiert.

$$G^\sigma\backslash M^\sigma \longrightarrow H^1(\sigma, Z(a)),\ O(m) \mapsto [g^{-1}\sigma(g)]. \tag{8}$$

Die Definition (8) ist korrekt,
d.h. $[g^{-1}\sigma(g)]$ hängt nich von der spezielle Wahl von $m \in O(m)$ und des Element g ab.

Sei $n \in O(m)$ ein weiteres Element des G^σ-Orbits $O(m)$. Dann gibt es ein $h \in G^\sigma$ mit

$$n = h \circ m = h \circ g \circ a.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (h \bullet g)^{-1}\sigma(h \bullet g) &= g^{-1} \bullet h^{-1} \bullet \sigma(h) \bullet \sigma(g) \\ &= g^{-1} \bullet h^{-1} \bullet h \bullet \sigma(g) && (\text{wegen } h \in G^\sigma) \\ &= g^{-1} \bullet \sigma(g) \end{aligned}$$

also

$$[(h \bullet g)^{-1}\sigma(h \bullet g)] = [g^{-1} \bullet \sigma(g)].$$

Damit hängt $[g^{-1}\bullet\sigma(g)]$ nicht von der speziellen Wahl von m ab. Wir haben noch die Unabhängigkeit von der speziellen Wahl von g zu Beweisen. Sei jetzt $h \in G$ ein weiteres Element mit

$$m = h\circ a.$$

Dann gilt

$$g\circ a = m = h\circ a,$$

also nach Definition der Operation "∘":

$$gag^{-1} = hah^{-1}$$

also

$$h^{-1}ga = ah^{-1}g,$$

also

$$h^{-1}g \in Z(a).$$

Zeigen wir, $g^{-1}\sigma(g)$ und $h^{-1}\sigma(h)$ liegen in derselben Äquivalenzklasse von Z(a). Mit

$$c := h^{-1}g$$

gilt

$$\begin{aligned} c\bullet(g^{-1}\sigma(g))\bullet\sigma(c)^{-1} &= h^{-1}g\bullet g^{-1}\sigma(g)\bullet(\sigma(h)^{-1}\bullet\sigma(g))^{-1} \\ &= h^{-1}\sigma(g)\bullet\sigma(g)^{-1}\sigma(h) \\ &= h^{-1}\sigma(h) \end{aligned}$$

also

$$[g^{-1}\sigma(g)] = [h^{-1}\sigma(h)]$$

Damit ist die Abbildung (8) wohldefiniert.

<u>Die Abbildung</u> (8) <u>ist injektiv</u>.

Seien $m, n \in M_\tau$ zwei Elemente, deren Oribits dasselbe Bild in $H^1(\sigma, Z(a))$ besitzen und $g, h \in G$ Elemente mit

$$m = g\circ a \text{ bzw. } n = h\circ a.$$

Dann sind $g^{-1}\sigma(g)$ und $h^{-1}\sigma(h)$ äquivalent, d.h. es gibt ein $c \in Z(a)$ mit

$$g^{-1}\sigma(g) = c\bullet h^{-1}\sigma(h)\bullet\sigma(c)^{-1}.$$

Dann gilt

$$\sigma(g)\bullet\sigma(c)\bullet\sigma(h)^{-1} = g\bullet c\bullet h^{-1},$$

also

$$\sigma(g\bullet c\bullet h^{-1}) = g\bullet c\bullet h^{-1},$$

d.h.

$$g\bullet c\bullet h^{-1} \in G^\sigma$$

und

$$\begin{aligned} (g\bullet c\bullet h^{-1})\circ n &= (g\bullet c\bullet h^{-1})\bullet h\circ a && \text{(nach Wahl von h)} \\ &= g\bullet c\circ a \\ &= g\circ a && \text{(wegen } c\in Z(a) \text{ und der Definiton von "}\circ\text{")} \\ &= m && \text{(nach Wahl von g)} \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, m und n liegen im selben G^σ-Orbit, repräsentieren also dasselbe Element von $G^\sigma\backslash M^\sigma$.

<u>Die Abbildung</u> (8) <u>ist surjektiv</u>.

Sei $b \in Z(a)$ der Repräsentant eines Elements von $H^1(\sigma, Z(a))$. Wegen der Surjetivität der Abbildung $f: G \longrightarrow G$ gibt es ein $g \in G$ mit

$$b = f(g) = g \bullet \sigma(g)^{-1}$$

Wir wenden σ auf $g^{-1} \circ a$ an und erhalten

$\sigma(g^{-1} \circ a)$	$= \sigma(g)^{-1} \circ \sigma(a)$	(nach Definition von "∘")
	$= \sigma(g)^{-1} \circ a$	(wegen $a \in M^\sigma$)
	$= g^{-1} \bullet b \circ a$	(nach Wahl von g)
	$= g^{-1} \circ a$	(wegen $b \in Z(a)$ und der Defintion von "∘")

Damit liegt $g^{-1} \circ a$ in M^σ, repräsentiert also ein Element von $G^\sigma \backslash M^\sigma$. Das Bild dieses Elements bei der Abbildung (8) wird repräsentiert durch

$$(g^{-1})^{-1} \sigma(g^{-1}) = g \bullet \sigma(g)^{-1} = b.$$

Damit ist die Surjektivität der Abbildung (8) bewiesen.
6. Schritt. Beweis der Behauptung.
Nach (i) ist Z(a) eine σ-stabile abgeschlossene Untergruppe von G. Nach dem dritten Schritt induziert der natürliche Homomorphismus $Z(a) \twoheadrightarrow Z(a)/Z(a)^0$ eine surjektive Abbildung

$$H^1(\sigma, Z(a)) \twoheadrightarrow H^1(\sigma, Z(a) / Z(a)^0)$$

die nach dem vierten Schritt sogar bijektiv ist. Durch Zusammensetzen mit der Bijektion des fünften Schritts erhalten wir eine bijektive Abbildung

$$G^\sigma \backslash M^\sigma \xrightarrow{\cong} H^1(\sigma, Z(a)/Z(a)^0) \tag{9}$$

Weil nach Voraussetzung Z(a) zusammenhängend ist, besteht die Faktorgruppe

$$Z(a)/Z(a)^0$$

aus nur einem Element. Auf Grund der Definition im im zweiten Schritt besteht dann auch die Menge

$$H^1(\sigma, Z(a)/Z(a)^0)$$

der Äquvlenzklassen von $Z(a)/Z(a)^0$ aus nur einem Element. Auf Grund der Bijektion (9) ist auch die Menge

$$G^\sigma \backslash M^\sigma$$

der G^σ-Orbits von M^σ einelementig, d.h. G^σ operiert transitiv auf M^σ, wie behauptet.
QED.

4.4.18 Aufgabe 2 *76*

Seien G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe und $\tau: G \longrightarrow G$ ein Endomorphismus algebraischer Gruppen, dessen Differential $d\tau: L(G) \longrightarrow L(G)$ nilpotent ist. Zeigen Sie, dann ist die Abbildung

$$f: G \longrightarrow G,\ x \mapsto \tau(x) \bullet x^{-1},$$

surjektiv.
Beweis. 1. Schritt. df_e ist ein k-linearer Isomorphismus.
Nach 4.4.13 (i) gilt

$$df_e = d\tau_e - id.$$

Nach Voraussetzung ist die k-lineare Abbildung

$$d\tau_e: T_eG \longrightarrow T_eG$$

nilpotent. Wir können eine Basis von T_eG so wählen, daß die Matrix von $d\tau_e$ eine obere Dreieckmatrix ist (nach 2.4.2A (i) mit $S := \{d\tau_e\}$). Weil $d\tau_e$ nilpotent ist, sind die Einträge dieser Matrix auf der Hauptdiagonalen sämtlich gleich 0. Die Matrix von

$$df_e = d\tau_e - id$$

ist dann eine obere Dreicksmatrix, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen sämtlich gieich -1 sind. Die Determinante diese Matrix ist eine Potenz von -1, also von Null verschieden. Also ist df_e umkehrbar, d.h. ein k-linearer Isomorphismus.

2. Schritt. Das Differential von f ist in allen Punkten ein k-linearer Isomorphismus.
Sei $g \in G$. Wir haben zu zeigen, das Differential

$$df_g: T_gG \longrightarrow T_{f(g)}G$$

ist bijektiv. Dazu betrachten wir das folgenden kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{f} & G & & x & \mapsto & \tau(x)\bullet x^{-1} \\ L_g\downarrow & & \downarrow L_{\tau(g)}\circ R_g & & \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{f} & G & & gx & \mapsto & \tau(gx)(gx)^{-1} = \tau(g)\bullet\tau(x)x^{-1}\bullet g^{-1} \end{array}$$

Wir gehen zu den Differentialen im neutralen Element über und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{df_e} & T_eG \\ (dL_g)_e\downarrow & & \downarrow d(L_{\tau(g)}\circ R_g)_e \\ T_gG & \xrightarrow{df_g} & T_{f(g)}G \end{array}$$

von k-linearen Abbildungen. Nach dem ersten Schritt ist die obere horizontale Abbildung bijektiv. Es reicht also zu zeigen, daß die vertikalen Abbildungen k-lineare Isomorphismen sind. Das ist aber der Fall, denn

$$L_g: G \longrightarrow G,\ x \mapsto gx,$$

$$L_{\tau(g)}: G \longrightarrow G,\ x \mapsto \tau(g)x,$$

und

$$R_g: G \longrightarrow G,\ x \mapsto xg^{-1},$$

sind Isomorphismen von affinen algebraischen Varietäten.

3. Schritt. Für jedes $b \in G$ sind die Differentiale der Abbildung

$$g_b: G \longrightarrow G,\ x \mapsto \tau(x)\bullet b\bullet x^{-1},$$

in allen Punkten bijektiv.

Bezeichne

$$\tau_b := \sigma_b \circ \tau: G \longrightarrow G$$

die Zusammensetzung von τ mit dem inneren Automorphismus

$$\sigma_b: G \longrightarrow G,\ x \mapsto bxb^{-1}.$$

Dann ist auch τ_b ein Endomorphismus von G. Weil $d\tau_e$ nilpotent ist, gilt für jeden von 0 verschiedenen k-linearen Unterraum $V \subseteq T_eG$,

$$\dim_k d\tau_e(V) < \dim_k V,$$

also

$$\begin{aligned}\dim_k (d\tau_b)_e(V) &= \dim_k (d\sigma_b)_e(d\tau_e(V)) \\ &=^{48} \dim_k d\tau_e(V) \\ &< \dim_k V\end{aligned}$$

Da dies für jedes V gilt, ist damit auch

$$(d\tau_b)_e \text{ nilpotent für jedes } b \in G.$$

Damit sind die bisher für τ bewiesenen Aussagen auch für τ_b richtig. Insbesondere gilt die Aussage des dritten Schritts auch für die Abbildung

$$f_b: G \longrightarrow G,\ x \mapsto \tau_b(x)\bullet x^{-1} = b\bullet\tau(x)\bullet b^{-1}\bullet x^{-1},$$

d.h. das Differential dieser Abbildung ist in allen Punkten bijektiv. Wegen

$$f_b = L_b \circ g_{b^{-1}}$$

und weil L_b ein Isomorphismus, sind auch die Differentiale von $g_{b^{-1}}$ in allen Punkten bijektiv, d.h. es gilt die Aussage des dritten Schritts.

4. <u>Schritt</u>. Beweis der Behauptung.

Nach dem Surjektivitätskriterium 4.4.17B ist auf Grund des dritten Schritts die Abbildung

$$g_e: G \longrightarrow G,\ x \mapsto \tau(x)\bullet x^{-1},$$

surjektiv, d.h. es gilt die Behauptung von 4.4.18 Aufgabe 2.

QED.

4.4.19 Die Jordan-Zerlegung in der Lie-Algebra 76

Für die hier auszuführenden Konstruktionen ist es nützlich eine alternative Beschreibung für die Umkehrung des Isomorphismus

$$\alpha_G: L(G) \longrightarrow T_eG$$

zur Verfügung zu haben.

4.4.19A Ergänzung: Definition der Faltung

Seien G eine lineare algebraische Gruppe, $g \in G$ und

$$f \in A := k[G].$$

Für jeden Tangentialvektor $X \in T_eG$ betrachten wir die Funktion

$$(*X)(f) = f*X: G \longrightarrow k,\ g \mapsto X(\lambda_{g^{-1}}f).$$

Diese Funktion ist regulär, so daß wir eine Abbildung

$$*X: k[G] \longrightarrow k[G],\ f \mapsto (*X)(f) = (f*X),$$

mit

$$(f*X)(x) = X(\lambda_{x^{-1}}f) \text{ für jedes } x \in G.$$

erhalten.

Beweis der Regularität der Funktion $f*X$.

---

[48] Weil σ_b ein Isomoprhismus von algebraischen Varietäten ist, ist das Differential $(d\sigma_b)_e$ ein k-linearer Isomorphismus.

Sei $\mu: G\times G \longrightarrow G$ die Multiplikation von G. Dann gilt $\mu^*(f) \in K[G]\otimes_K K[G]$, d.h.

$$\mu^*(f) = \sum_i f_i \otimes g_i \text{ mit } f_i, g_i \in K[G],$$

also

$$\lambda_{g^{-1}}(f)\,(x) = f(gx) = \sum_i f_i(g)g_i(x),$$

also

$$\lambda_{g^{-1}}(f) = \sum_i f_i(g)g_i,$$

Für jedes fest gewählte $g \in G$ erhalten wir

$$((*X)f)(g) = X(\lambda_{g^{-1}}(f)) = \sum_i f_i(g)X(g_i),$$

d.h. $(*X)f$ ist eine reguläre Funktion auf G,

$$(*X)(f) \in K[G].$$

QED.

4.4.19B Ergänzung: Eigenschaften der Faltung

Seien G eine lineare algebraische Gruppe und $X \in T_e G$. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) $*X \in L(G)$ ist linksinvariantes Vektorfeld.

(ii) Die Abbildung

$$T_e G \longrightarrow L(G),\ X \mapsto *X, \tag{1}$$

ist invers zur Abbildung

$$\alpha_G: L(G) \longrightarrow T_e G,\ D \mapsto (f \mapsto D(f)(e)),$$

von 4.4.5(i), d.h. es gilt

$$*X = -\,\Psi^{-1}(1\otimes X),$$

wenn Ψ die Abbildung von 4.4.4 bezeichnet (vgl. 4.4.5(iv)).

(iii) Die Abbildung (1) ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren.

(iv) Die Lie-Algebra L(G) operiert auf k[G] durch k-lineare Endomorphismen,

$$L(G) \times k[G] \longrightarrow k[G],\ (D, f) \mapsto D(f).$$

Jeder endlich-dimensionale k-lineare Unterraum $V \subseteq k[G]$, welcher stabil ist unter Rechtstranslationen, ist auch stabil unter den Elementen von L(G),

$$D(V) \subseteq V \text{ für } D \in L(G).$$

Insbesondere ist die Operation von L(G) auf k[G] lokal endlich.

(v) Sei $V \subseteq k[G]$ ein endlich-dimensionaler Unterraum, welcher stabil ist unter Rechtstranslationen. Dann gilt für jedes $f \in V$,

$$f*X = (d\rho)(X)(f).$$

Beweis. Zu (i). Als Funktion von f ist $(f*X)(g)$ für jedes $g\in G$ die Zusammensetzung

$$k[G] \xrightarrow{\lambda_{g^{-1}}} k[G] \xrightarrow{X} k$$

aus dem Algebra-Homomorphismus $\lambda_{g^{-1}}$ und der Derivation X, also selbst wieder eine Derivation. Genauer gilt für Funktionen f', f''∈A:=K[G]:

$$\begin{aligned}(f'f''*X)(g) &= X(\lambda_{g^{-1}}(f'f''))\\ &= X(\lambda_{g^{-1}}(f')\lambda_{g^{-1}}(f''))\\ &= \lambda_{g^{-1}}(f')(e)X(\lambda_{g^{-1}}(f'')) + \lambda_{g^{-1}}(f'')(e)X(\lambda_{g^{-1}}(f'))\\ &= f'(g)\cdot f''*X + f''(g)\cdot f'*X\end{aligned}$$

Mit andern Worten, $*X$ ist eine k-Derivation. Beweisen die Linksinvarianz. Für $x\in G$ gilt

$$\begin{aligned}((*X)\circ\lambda_x)(f)(g) &= (*X)(\lambda_x(f))(x)\\ &= X(\lambda_{g^{-1}}(\lambda_x(f)))\\ &= X(\lambda_{g^{-1}x}(f)) && \text{(da } \lambda \text{ eine Linksoperation ist)}\\ &= ((*X)f)(x^{-1}g) && \text{(Definition der Faltung)}\\ &=(\lambda_x((*X)f))(g), && \text{(Definiton von } \lambda_x)\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}((*X)\circ\lambda_x)(f) &= \lambda_x((*X)f)\\ &= (\lambda_x\circ (*X))(f),\end{aligned}$$

also

$$(*X)\circ\lambda_x = \lambda_x\circ(*X)$$

<u>Zu (ii)</u>. Die k-Linearität folgt unmittelbar aus der Definition. Zeigen wir die Abbildung

$$\eta:T_eG \longrightarrow L(G),\ X \mapsto *X,$$

ist invers zur Auswertungsabbildung α_G. Berechnen wir zunächst $\eta\circ\alpha_G$: Für $f\in A$, $X\in Lie(G)$ und $g\in G$ gilt

$$\begin{aligned}(((\eta\circ\alpha_G)(X))f)(g) &= (*\alpha_G(X)(f))(g) && \text{(Definition von } \eta)\\ &= \alpha_G(X)(\lambda_{g^{-1}}(f)) && \text{(Definition der Faltung)}\\ &= X(\lambda_{g^{-1}}(f))(e) && \text{(Definition von } \alpha_G)\\ &= \lambda_{g^{-1}}(Xf)(e) && \text{(Linksinvarianz von X)}\\ &= (Xf)(g)\end{aligned}$$

Da dies für alle f und g gilt, folgt $((\eta\circ\alpha_G)(X) = X$. Wir haben gezeigt

$$\eta\circ\alpha_G = \mathrm{Id}.$$

Berechnen wir $\alpha_G\circ\eta$. Es gilt

$$(((\alpha_G \circ \eta)X)f)(g) = \alpha_G(*X)f$$

$$= (*X)(f)(e) \qquad \text{(Definition von } \alpha_G\text{)}$$

$$= X(L_{g^{-1}}f)(e) \qquad \text{(Definition der Faltung)}$$

$$= (L_{g^{-1}}(Xf))(e) \qquad \text{(Linksinvarianz von X)}$$

$$= Xf(g)$$

Da dies für alle g und alle f gilt, folgt $(\alpha_G \circ \eta)X = X$ für alle X. Die Identität

$$*X = - \Psi^{-1}(1\otimes X),$$

ergibt sich durch Vergleich mit 4.4.5 (iv).

Zu (iii). Die Aussage ergibt sich aus (ii) und der Definition der Lie-Algebra-Struktur des Tangentialraums T_eG in 4.4.8(i).

Zu (iv). Die Lie-Algebra L(G) operiert auf k[G],

$$L(G) \times k[G] \longrightarrow k[G],\ (D, f) \mapsto D(f),$$

weil sie aus k-Derivationen besteht, $L(G) \subseteq Der_k(k[G], k[G])$. Sei jetzt

$$V \subseteq k[G]$$

ein endlich-dimensionaler k-linearer Unterraum, welche statib ist unter allen Linkstranslationen λ_g, $g \in G$. Nach 4.4.15 Aufgabe 2 besteht für das Differential der rationalen Darstellung

$$d\rho_V: L(G) \longrightarrow L(\mathbf{GL}(V)) = gl(V)$$

die Identität

$$d\rho_V(X)(f) = X(f)$$

für $X\in L(G)$ und $f\in V\subseteq k[G]$. Wegen $d\rho_V(X) \in GL(V)$ erhalten wir

$$X(f) = d\rho_V(X)(f) \subseteq V \text{ für } f \in V,$$

also

$$X(V) \subseteq V.$$

Wir haben gezeigt, V ist stabilt unter den Elementen von L(G). Wegen der lokalen Endlichkeit der Operation durch Rechtstranslationen ist auch die Operation von L(G) auf k[G] lokal endlich.

Zu (v). Sei $V \subseteq k[G]$ ein endlich-dimensionaler k-linearer Unterraum, welcher stabil ist unter allen Rechtstranslationen. Wir wählen eine Basis des k-Vektorraums V, sagen wir

$$V = k\bullet f_1 + ... + k\bullet f_r.$$

Dann gilt

$$\rho^*(V) \subseteq k[G]\otimes_k V$$

(vgl. 2.3.6A(ii)) und wir können schreiben

$$\rho^*(f_i) = \sum_{j=1}^{r} m_{ji}\otimes f_j$$

mit eindeutig bestimmten $m_{ji}\in k[G]$. Für $x,y \in G$ gilt

$$f_i(xy) = \sum_{j=1}^{r} m_{ji}(x)\otimes f_j(y),$$

also für jedes $y \in G$ (vgl. Schritt 3 im Beweis von 2.3.6A)

$$(\rho(y)f_i)(x) = f(a(y^{-1},x) = f(xy) = \sum_{j=1}^{r} m_{ji}(y^{-1})\bullet f_j(x) = \sum_{j=1}^{r} u_{ji}(y)\bullet f_j(x)$$

mit

$$u_{ji}(y) := m_{ji}(y^{-1}).$$

Wir erhalten

$$\rho(y)f_i = \sum_{j=1}^{r} u_{ji}(y)\bullet f_j,$$

d.h. die Operation von $\rho(y)$ auf V hat bezüglich der Basis $\{f_i\}$ die Matrix

$$(u_{ij}).$$

Es folgt

$$\lambda_{x^{-1}} f_i(y) = f(xy) = \rho(y)f_i(x) = \sum_{j=1}^{r} u_{ji}(y)\bullet f_j(x) \text{ mit}$$

also für jedes $x \in G$

$$(f_i * X)(x) = X(\lambda_{x^{-1}} f_i) = \sum_{j=1}^{r} X(u_{ji})\bullet f_j(x)$$

also

$$f_i * X = \sum_{j=1}^{r} X(u_{ji})\bullet f_j.$$

Die Operation von $*X$ auf V hat bezüglich der Basis $\{f_i\}$ von V die Matrix

$$(X(u_{ij}))$$

Nach 4.4.15 Aufgabe 1 erhalten wir für die Matrix Differentials von $\rho_V: G \longrightarrow GL(V)$, $x \mapsto \rho(x)|_V$ bezüglich der Basis $\{f_i\}$ dieselbe Matrix,

$$d\rho(X) = (X(u_{ij})).$$

Die beiden Abbildungen stimmen also auf V überein, d.h. es gilt

$$d\rho(X)(f) = f*X$$

für jedes $f \in V$.
QED.

4.4.19C Die Jordan-Zerlegung in $L(GL_n)$

Seien V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $X \in \mathbf{gl}(V) = T_e\mathbf{GL}(V)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) X ist genau dann halbeinfach, wenn $*X \in End_k(k[\mathbf{GL}(V)])$ halbeinfach ist.

(ii) X ist genau dann unipotent, wenn $*X \in End_k(k[\mathbf{GL}(V)])$ lokal nilpotent ist.

(iii) Seien $D \in L(\mathbf{GL}(V)) \subseteq End_k(k[\mathbf{GL}(V)])$ und

$$D = D_s + D_n$$

die Jordan-Zerlegung von D in $\mathrm{End}_k(k[\mathbf{GL}(V)])$. Dann gilt

$$D_s, D_n \in L(\mathbf{GL}(V))$$

und für $D = *X$ mit $X \in T_e\mathbf{GL}(V)$ ist

$$D_s = *X_s \text{ und } D_s = *X_s.$$

Beweis.

1. Schritt. Vergleich der Operationen von gl(V) auf V und gl(V)

Seien V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und

$$X: V \longrightarrow V$$

eine k-lineare Abbildung. Wir setzen

$$E := \mathbf{gl}(V) \text{ und } \check{E}: \mathrm{Hom}_k(E, k).$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) X ist halbeinfach (bzw. nilpotent).

(b) Die k-lineare Abbildung

$$\circ X: E \longrightarrow E,\ x \mapsto x\circ X,$$

ist halbeinfach (bzw. nilpotent).

(c) Die k-lineare Abbildung

$$\circ X: E \longrightarrow E,\ x \mapsto X\circ x,$$

ist halbeinfach (bzw. nilpotent).

(d) Die k-lineare Abbildung

$$\tilde{X}: \check{E} \longrightarrow \check{E},\ \ell \mapsto (x \mapsto \ell(x\circ X)).$$

ist halbeinfach (bzw. nilpotent).

(e) Die k-lineare Abbildung

$$\approx\!\!X: \check{E} \longrightarrow \check{E},\ \ell \mapsto (x \mapsto \ell(X\circ x)).$$

ist halbeinfach (bzw. nilpotent).

(a) ⇒ (b) und (a) ⇒ (c).

1. Fall. X ist halbeinfach.

Nach Voraussetzung gibt es eine k-Vektorraumbasis von V, welche aus Eigenvektoren von X besteht, sagen wir

$$V = k\bullet e_1 + ... + k\bullet e_n,\ X(e_i) = c_i\bullet e_i,\ c_i \in k \text{ für } i = 1,...,n.$$

Die zu den e_i duale Basis bezeichnen wir mit

$$x_1,...,x_n \in \check{V}.$$

Dann bilden die Tensorprodukte

$$E_{ij} := e_i \otimes x_j \in V\otimes_k \check{V} = \mathbf{gl}(V)\ (i,j = 1,...,n)$$

(mit $E_{ij}(e_j) = e_i$ und $E_{ij}(e_\nu) = 0$ für $\nu \neq j$) eine Basis von $\mathbf{gl}(V)$ mit

$$(E_{ij}\circ X)(e_j) = E_{ij}(c_j\bullet e_j) = c_j\bullet E_{ij}(e_j)$$

und

$$(E_{ij}\circ X)(e_\nu) = E_{ij}(c_\nu\bullet e_\nu) = c_\nu\bullet E_{ij}(e_\nu) = 0 = c_j\bullet E_{ij}(e_\nu)$$

für $\nu \neq j$, also

$$E_{ij}\circ X = c_j\bullet E_{ij},$$

d.h. in der Situation von (b) bilden die E_{ij} eine Basis auf Eigenvektoren.
Analog gilt

$$(X\circ E_{ij})(e_j) = X(e_i) = c_i\bullet e_i = c_i\bullet E_{ij}(e_j)$$

und

$$(X\circ E_{ij})(e_\nu) = X(0) = 0 = c_i\bullet E_{ij}(e_\nu)$$

für $\nu \neq j$, also

$$X\circ E_{ij} = c_i\bullet E_{ij},$$

d.h. auch in der Situation von (c) bilden die E_{ij} eine Basis aus Eigenvektoren.

2. Fall. X ist nilpotent.

Nach Voraussetzung gibt es eine natürliche Zahl r mit $X^r = 0$. Dann ist aber auch

$$x\circ X^r = X^r\circ x = 0$$

für jedes $x \in \mathbf{gl}(V)$, d.h. die auch die auf gl(V) induzierten Abbildungen von (b) und (c) sind nilpotent.

(b) ⇒ (a) und (c) ⇒ (a).

Seien die Abbildungen von (b) bzw. (c) halbeinfach (bzw. nilpotent). Wir führen die gemeinsamen Bezeichnungen

$\tilde{X} := \circ X$ bzw. $\tilde{X} := X\circ$

$\tilde{X}_s := \circ(X_s)$ bzw. $\tilde{X}_s := (X_s)\circ$

$\tilde{X}_n := \circ(X_n)$ bzw. $\tilde{X}_n := (X_n)\circ$

für Abbildungen von (b) und (c) ein und betrachten die addive Jordan-Zerlegung von X, sagen wir

$$X = X_s + X_n\text{ , } X_s \text{ halbeinfach, } X_n \text{ nilpotent und } X_s\circ X_n = X_n\circ X_s.$$

Auf Grund der bereits bewiesenen Implikationen ist dann

$$\tilde{X}_s \text{ halbeinfach und } \tilde{X}_n \text{ nilpotent.}$$

Direkt an den Abbildungsvorschriften lesen wir ab, wegen $X = X_s + X_n$ gilt

$$\tilde{X} = \tilde{X}_s + \tilde{X}_n$$

und wegen $X_s\circ X_n = X_n\circ X_s$ gilt

$$\tilde{X}_s\circ\tilde{X}_n = \tilde{X}_n\circ\tilde{X}_s.$$

Mit anderen Worten,

$$\tilde{X} = \tilde{X}_s + \tilde{X}_n$$

ist die Jordan-Zerlegung von $\tilde{X}$. Weil $\tilde{X}$ nach Voraussetzung halbeinfach (bzw. nilpotent) ist, gilt

$$\tilde{X}_n = 0 \text{ (bzw. } \tilde{X}_s = 0).$$

Wir werten diese Abbildung in der Einheitsmatrix $e \in gl(V)$ aus und erhalten

$$X_n = 0 \text{ (bzw. } X_s = 0),$$

also

$$X = X_s \text{ (bzw. } X = X_n),$$

d.h. X ist halbeinfach (bzw. nilpotent).
Wir haben noch die Äquivalenz zu den Aussagen (d) und (e) zu beweisen.

(d) $\Leftrightarrow$ (a).
Wir fixieren eine Basis des Vektorraums V und schreiben die Koordinatenvektoren der Elemente von V bezüglich dieser Basis als Zeilen. Ist $n := \dim_k V$ so können wir die Elemente von V mit den n-reihigen Zeilen-Vektoren mit Koordinaten aus k identifiezieren,

$$V = k^{1\times n} \qquad \text{(Zeilenvektoren mit n Koordinaten aus k).}$$

Wir führen auf V das Standard-Skalarprodukt ein,

$$< \xi, \eta > = \xi \bullet {}^t\eta \qquad \text{(Matrizenprodukt)}$$

für $\xi, \eta \in V$.
Die Elemente von

$$E = \mathrm{End}_k(V) = \mathbf{gl}_n$$

können wir mit den n×n-Matrizen mit Einträgen aus k betrachten. Nach Definition des Skalarprodukts gilt für je zwei Zeilen-Vektoren $\xi, \eta \in V$ und jede Matrix $A \in E$:

$$\begin{aligned} <\xi, \eta\bullet A > &= \xi\bullet{}^t(\eta\bullet A) \\ &= \xi\bullet {}^tA\bullet{}^t\eta \\ &= <X\bullet{}^tA, \eta> \end{aligned}$$

Wir verwenden den Isomorphismus,

$$\varphi\colon E \longrightarrow \check{E},\ x \mapsto < x, ? >,$$

um die Endomorphismen von E mit denen von $\check{E}$ zu vergleichen. Das folgende Diagramm von k-linearen Abbildungen ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\varphi} & \check{E} & \qquad x & \mapsto \quad <x,\ ?> \\ {\scriptstyle \circ{}^tX}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{X}} & \qquad \downarrow & \qquad \downarrow \\ E & \xrightarrow{\varphi} & \check{E} & \qquad x\bullet{}^tX & \mapsto <x\bullet{}^tX,?> = <x,?\bullet X> \end{array}$$

Man beachte, auf Grund der vorgenommenen Identifikationen, fällt die Komposition von Abbildungen mit dem Matrizen-Produkt zusammen.
Weil φ ein k-linearer Isomorphismus ist, hat jedes Element $\ell\in\check{E}$ die Gestalt

$$\ell(?) = <x, ? >$$

mit einem eindeutig bestimmten $x \in E$. Die rechte vertikale Abbildung hat deshalb die Abbildungsvorschrift

$$\ell(?) \mapsto \ell(?\circ X),$$

fällt also tatsächlich mit der Abbildung $\widetilde{X}$ zusammen. Auf Grund des kommutativen Vierecks und weil φ ein k-linearer Isomorphismus ist, ist die Halbeinfachheit von $\widetilde{X}$ äquivalent zu der von $\circ{}^tX$ (vgl. 2.4.4 (iv)) und auf Grund der bereits bewiesenen Implikationen zu der von ${}^tX$.
Nun ist X genau dann halbeinfach (d.h. diagonalisierbar) wenn ${}^tX$ es ist. Und X ist genau dann nilpotent, wenn ${}^tX$ es ist.
Wir haben gezeigt, (d) ist äquivalent zu (a).

<u>(e) ⇔ (a)</u>.
Wir fixieren eine Basis des Vektorraums V und schreiben die Koordinatenvektoren der Elemente von V bezüglich dieser Basis als Spalten. Ist $n := \dim_k V$ so können wir die Elemente von V mit den n-reihigen Spalten-Vektoren mit Koordinaten aus k identifiezieren,

$$V = k^{n\times 1} \qquad \text{(Spaltenvektoren mit n Koordinaten aus k).}$$

Wir führen auf V das Standard-Skalarprodukt ein,

$$< \xi, \eta > = {}^t\xi\bullet\eta \qquad \text{(Matrizenprodukt)}$$

für $\xi, \eta \in V$.
Die Elemente von

$$E = \mathrm{End}_k(V) = \mathbf{gl}_n$$

können wir mit den n×n-Matrizen mit Einträgen aus k betrachten. Nach Definition des Skalarprodukts gilt für je zwei Spalten-Vektoren $\xi, \eta \in V$ und jede Matrix $A \in E$:

$$\begin{aligned} < A\bullet X, \eta> &= {}^t(A\bullet X)\bullet\eta \\ &= {}^tX\bullet {}^tA\bullet\eta \\ &= <X, {}^tA\bullet\eta > \end{aligned}$$

Wir verwenden den Isomorphismus,

$$\psi\colon E \longrightarrow \check{E},\ x \mapsto < x, ? >,$$

um die Endomorphismen von E mit denen von $\check{E}$ zu vergleichen. Das folgende Diagramm von k-linearen Abbildungen ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & \check{E} \\ {}^tX\circ\downarrow & & \downarrow\approx{X} \\ E & \xrightarrow{\varphi} & \check{E} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \mapsto & <x,\ ?> \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^tX\bullet x & \mapsto & <{}^tX\bullet x,?> = <x,X\bullet ?> \end{array}$$

Man beachte, auf Grund der vorgenommenen Identifikationen, fällt die Komposition von Abbildungen mit dem Matrizen-Produkt zusammen.
Weil φ ein k-linearer Isomorphismus ist, hat jedes Element $\ell\in\check{E}$ die Gestalt

$$\ell(?) = <x, ? >$$

mit einem eindeutig bestimmten $x \in E$. Die rechte vertikale Abbildung hat deshalb die Abbildungsvorschrift

$$\ell(?) \mapsto \ell(X\circ ?),$$

fällt also tatsächlich mit der Abbildung $\overset{\approx}{X}$ zusammen. Auf Grund des kommutativen Vierecks und weil φ ein k-linearer Isomorphismus ist, ist die Halbeinfachheit von $\overset{\approx}{X}$ äquivalent zu der von ${}^tX\circ$ (vgl. 2.4.4 (iv)) und auf Grund der bereits bewiesenen Implikationen zu der von ${}^tX$.
Nun ist X genau dann halbeinfach (d.h. diagonalisierbar) wenn ${}^tX$ es ist. Und X ist genau dann nilpotent, wenn ${}^tX$ es ist.
Wir haben gezeigt, (e) ist äquivalent zu (a).

2. Schritt. Vergleich der Operationen auf E und $S_k(E)$

Seien E ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum,

$$X: E \longrightarrow E$$

eine k-lineare Abbildung und

$$s(X): S_k(E) \longrightarrow S_k(E)$$

$$x_1\bullet\ldots\bullet x_r \mapsto \sum_{i=1}^{r} x_1\bullet\ldots\bullet x_{i-1}\bullet X(x_i)\bullet x_{i+1}\bullet\ldots\bullet x_r$$

(alle $x_i \in E$) die durch X induzierte k-Derivation der symmetrischen Algbra $S_k(E)$ von E über k. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) X ist halbeinfach (bzw. nilpotent)
(b) s(X) ist halbeinfach (bzw. lokal nilpotent).

Die Derivation s(X) bildet die homogenen Komponenten von $S_k(E)$ in homogene Komponenten von $S_k(E)$ ab. Weil diese homogenen Komponenten endlich-dimesional sind, ist der Endomorphismus s(X) von $S_k(E)$ lokal endlich. Die Derivation s(X) stimmt auf E mit X überein.

$$s(X)|_E = X,$$

Ist s(X) halbeinfach (bzw. lokal nilpotent), so gilt daselbe auch für die Einschränkung auf E (vgl. Bemerkung 2.4.7 (v)), d.h. X ist halbeinfach (bzw. nilpotent - E ist endlich-dimensional). Wir haben noch zu zeigen, aus der Hableinfachheit bzw. Nilpotenz von X folgt die von s(X).

Sei X halbeinfach. Dann gibt es eine Basis von E, sagen wir

$$E = k\bullet v_1+\ldots+k\bullet v_n,$$

die aus Eigenvektoren von X besteht, sagen wir

$$X(v_i) = c_i\bullet v_i \text{ mit } c_i \in k.$$

Die Produkte

$$v_{i_1}\bullet v_{i_2}\bullet\ldots\bullet v_{i_r}$$

mit $i_1 \le\ldots\le i_r$, r = 0,1,2,... bilden dann eine k-Vektorraumbasis von $S_k(E)$. Weiter gilt

$$(1\otimes\ldots\otimes \underset{\nu\text{-ter Faktor}}{\overset{\downarrow}{X}} \otimes\ldots\otimes 1)(v_{i_1}\bullet v_{i_2}\bullet\ldots\bullet v_{i_r}) = c_{i_\nu}\bullet v_{i_1}\bullet v_{i_2}\bullet\ldots\bullet v_{i_r}$$

Die Abbildungen der Gestalt

$$1\otimes\ldots\otimes X\otimes\ldots\otimes 1$$

sind somit halbeinfach. Dann ist aber auch die Summe s(X) dieser Abbldungen halbeinfach (vgl. 2.4.3(iii)).

Sei X nilpotent, sagen wir $X^s = 0$. Dann ist auch die s-te Potenz der Abbildungen der Gestalt

$$1\otimes\ldots\otimes X\otimes\ldots\otimes 1$$

identisch Null. Die Summe s(X) dieser Abbildungen ist damit nilpotent auf den endlich-dimensionalen Unterräumen, also lokal nilpotent.

3. <u>Schritt</u>. Vergleich der Operationen auf $S_k(\check{E})$ und $k[GL(V)]$

Die Einschränkung der Determinante

$$\det: E := \mathrm{End}_k(V) \longrightarrow k$$

auf die allgemeine lineare Gruppe $\mathbf{GL}(V) \subseteq \mathrm{End}_k(V)$ ist eine reguläre Funktion, die wir ebenfalls mit

$$\det \in k[\mathbf{GL}(V)]$$

bezeichnen wollen.

(a) Die symmetrische Algebra von $\check{E}$ über k ist eine k-Teilalgebra des Koordinatenrings

$$S_k(\check{E}) \hookrightarrow k[\mathbf{GL}(V)],$$

und es gilt

$$k[\mathbf{GL}(V)] = S_k(\check{E})[1/\det],$$

d.h. der Koordinatenring ist der Quotientenring der symmetrischen Algebra bezüglich der Potenzen der Determinante.

(b) Die Teilalgebra $S_k(\check{E})$ ist stabil unter den Rechtstranslationen, d.h.

$$\rho(x)(S_k(\check{E})) \subseteq S_k(\check{E}) \text{ für jedes } x \in \mathbf{GL}(V)$$

und (damit) unter den Operationen der Lie-Algebra $L(\mathbf{GL}(V))$ auf dem Koordinatenring $k[\mathbf{GL}(V)]$.

(c) Die Operation eines Vektorfelds $D \in L(G)$ auf $k[\mathbf{GL}(V)]$ ist genau dann halbeinfach (bzw. lokal nilpotent), wenn dessen Einschränkung auf $S_k(\check{E})$ halbeinfach (bzw. lokal nilpotent) ist.

(d) Für jeden Punkt $x \in \mathbf{GL}(V)$ gilt

$$\rho(x)(\det) = \det(x) \cdot \det$$

und

$$\lambda(x)(\det) = \det(x)^{-1} \cdot \det,$$

Für jeden Tangentialvektor $X \in T_e\mathbf{GL}(V) = \mathbf{gl}(V)$ gilt

$$\det * X = \mathrm{tr}(X) \cdot \det$$

wenn $\mathrm{tr}(X)$ die Spur der Matrix X bezeichnet.

Die Regularität der Einschränkung von det auf $\mathbf{GL}(V)$ erkennt man durch die Wahl einer Basis von V, durch welche sich $\mathbf{GL}(V)$ mit einer $\mathbf{GL}_n$ identifizieren läßt, sagen wir

$$\mathbf{GL}(V) = \mathbf{GL}_n,\ n := \dim_k V.$$

Die Determinante wird so zu einem Polynom des Grades n in den Einträgen der n×n-Matrizen von $\mathbf{GL}_n$.

<u>Zu (a)</u>. Die symmetrische Algebra wird durch die beschriebene Identifikation zur Polynomalgebra

$$S_k(\check{E}) = k[T_{ij} \mid i,j = 1,...,n]$$

in den n^2 Unbestimmten T_{ij}, und der Koordinatenring bekommt die Gestalt

$$\begin{aligned} k[\mathbf{GL}(V)] &= k[T_{ij}, \det^{-1} \mid i,j = 1,...,n] \\ &= S_k(\check{E})[1/\det]. \end{aligned}$$

(vgl. 2.1.4 Beispiel 3).

Zu (b). Bezeichne T die n×n-Matrix mit dem Eintrag T_{ij} in der Position (i,j). Wir betrachten die Polynome in den T_{ij} als Funktionen von T. Für

$$f = f(T) \in S_k(\check{E})$$

und $x \in \mathbf{GL}(V) = \mathbf{GL}_n$ gilt

$$(\rho(x)f)(T) = f(Tx).$$

Dies ist ein Polynom in den T_{ij}, d.h. es gilt

$$\rho(x)f \in S_k(\check{E}).$$

Da dies für jedes f gilt, folgt

$$\rho(x)(S_k(\check{E})) \subseteq S_k(\check{E}).$$

Wir haben noch zu zeigen, $S_k(\check{E})$ ist stabil unter der Operation von L(**GL**(V)). Nach 4.4.19B(ii) hat jedes Element $D \in L(G)$ die Gestalt

$$D = *X \text{ mit } X \in T_eG$$

und nach 4.4.19B(v) gilt für jeden endlich-dimensionalen k-Vektorraum

$$W \subseteq S_k(\check{E}),$$

der stabil ist unter Rechtstranslationen und jedes $f \in W$

$$D(f) = *X(f) = f*X = (d\rho)(X)(f).$$

Nach Wahl von W definiert ρ eine rationale Darstellung

$$\rho_W: GL(V) \longrightarrow GL(W),\ x \mapsto \rho(x)|_W,$$

das Differential im neutralen Element also eine k-lineare Abbildung

$$d\rho_W: T_e\mathbf{GL}(V) \longrightarrow T_e\mathbf{GL}(W) = \mathbf{gl}(W).$$

Insbesondere ist $d\rho(X) \in \mathbf{gl}(W)$, wegen $f \in W$, also $d\rho(X)(f) \in W$, also

$$D(f) \in W.$$

Wir haben gezeigt,

$$D(W) \subseteq W \subseteq S_k(\check{E}),$$

für jedes $D \in L(G)$ und jeden endlich-dimensionalen k-linearen Unterraum W der Algebra $S_k(\check{E})$, der stabil ist unter Rechtstranslationen. Weil die Operation von G durch Rechtstranslationen auf der Algebra $S_k(\check{E})$ lokal endlich ist, liegt jedes Element der Algebra $S_k(\check{E})$ in einem solchen Unterraum W. Es gilt also

$$D(S_k(\check{E})) \subseteq S_k(\check{E})$$

für jedes $D \in L(G)$, wie behauptet.

Bemerkung

Wir beweisen als nächstes Aussage (d), da wir diese zum Beweis von (c) benötigen,

Zu (d). Es gilt

$$\rho(x)(\det)(T) = \det(Tx) = \det(T)\bullet\det(x) = \det(x)\bullet\det(T),$$

also

$$\rho(x)(\det) = \det(x)\bullet\det,$$

und

$$\lambda(x)(\det)(T) = \det(x^{-1}T) = \det(x)^{-1}\bullet\det(T),$$

also

$$\lambda(x)(\det) = \det(x)^{-1}\bullet\det,$$

Weiter gilt für $x \in GL(V)$:

$$\begin{aligned}(\det * X)(x) &= X(\lambda_{x^{-1}}(\det)) && \text{(nach Definition der Faltung)}\\ &= X(\det(x)\bullet\det)\end{aligned}$$

Bezeichne T_i die i-te Spalte der Matrix T, so daß wir

$$\det = \det(T) = \det(T_1,...,T_n)$$

schreiben können. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}(\det * X)(x) &= X(\det(x)\bullet\det(T_1,...,T_n))\\ &= \det(x)\bullet X(\det(T_1,...,T_n)) && \text{(X ist k-linear)}\\ &= \det(x)\bullet \sum_{i=1}^{n} \det(e_1,...,e_{i-1},X(T_i),e_{i+1},...,e_n) && \text{(X ist eine Derivation)}\end{aligned}$$

Dabei soll $X(T_i)$ den Spalten-Vektor bezeichnen, den man aus T_i durch Anwenden von X auf die Koordinaten erhält, d.h.

$$X(T_i) := \begin{pmatrix} X(T_{1i}) \\ \dots \\ X(T_{ni}) \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}(\det * X)(x) &= \det(x)\bullet \sum_{i=1}^{n} \det(e_1,...,e_{i-1},X(T_{ii})\bullet e_i,e_{i+1},...,e_n)\\ &= \det(x)\bullet \sum_{i=1}^{n} X(T_{ii}).\end{aligned}$$

Bei der Identifikation von $T_e\mathbf{GL}(V)$ mit $\mathbf{gl}(V)$ wird X zur Matrix mit dem Eintrag

$$X(T_{ij})$$

in der Position (i,j). Die Summe auf der rechten Seite ist damit gerade die Spur von X. Wir erhalten

$$(\det * X)(x) = tr(X)\bullet\det(x) \text{ für jedes } x \in \mathbf{GL}(V),$$

also

$$\det * X = tr(X)\bullet\det,$$

wie behauptet.

<u>Zu (c)</u>. Die Operation von $D \in L(G)$ auf $k[\mathbf{GL}(V)]$ sei halbeinfach (bzw. lokal nilpotent). Weil $S_k(\breve{E})$ stabil ist unter der Operation von D (nach (b)) ist die Einschränkung von D auf $S_k(\breve{E})$ ein halbeinfacher (bzw. lokal nilpotenter) Endomorphismus von $S_k(\breve{E})$ (vgl. Bemerkung 2.4.7 (v)).

Sei jetzt umgekehrt $D \in L(G)$ ein Vektorfeld, dessen Operation auf $S_k(\check{E})$ halbeinfach (bzw. lokal nilpotent) ist. Wir haben zu zeigen, dasselbe gilt dann auch für die Operation von D auf dem Koordinatenring $k[\mathbf{GL}(V)]$.

1. <u>Fall</u>. D operiert halbeinfach auf $S_k(\check{E})$.

Wir haben zu zeigen, D ist halbeinfach auf $k[\mathbf{GL}(V)]$, d.h. die Einschränkung von D auf jeden D-stabilen k-linearen Unterraum von $k[\mathbf{GL}(V)]$ endlicher Dimension ist halbeinfach (vgl. 2.4.7). Nach dem ersten Teil von Bemerkung 2.4.7 (ii) reicht es zu zeigen, jedes Element von $k[\mathbf{GL}(V)]$ liegt in einem D-stabilen k-linearen Unterraum

$$W \subseteq k[\mathbf{GL}(V)],$$

endlicher Dimension, auf welchem D halbeinfach operiert.

Jedes Element von $k[\mathbf{GL}(V)]$ hat die Gestalt $\det^{-\alpha}\cdot f$ mit $f \in S_k(\check{E})$. Nach Voraussetzung liegt f in einem D-stabilen k-linearen Unterraum

$$W \subseteq S_k(\check{E}),$$

endlicher Dimension, auf welchem D halbeinfach operiert, sagen wir

$$f \in W,\ W = k\cdot w_1+...+k\cdot w_r\ ,\ D(w_i) = c_i\cdot w_i,\ c_i\in k \text{ für } i = 1,...,r.$$

Dann gilt aber

$$\det^{-\alpha}\cdot f \in k\cdot \det^{-\alpha}\cdot w_1+...+k\cdot \det^{-\alpha}\cdot w_r \tag{1}$$

und mit $D = *X$, $X \in T_eG$ erhalten wir

$$\begin{aligned} D(\det^{-\alpha}\cdot w_i) &= (\det^{-\alpha}\cdot w_i))*X \\ &= (-\alpha)\cdot\det^{-\alpha-1}\cdot(\det*X)\cdot w_i + \det^{-\alpha}\cdot (w_i*X) && (*X \text{ ist eine Derivation}) \\ &= (-\alpha)\cdot\det^{-\alpha-1}\cdot(tr(X)\cdot\det)\cdot w_i + \det^{-\alpha}\cdot (w_i*X) && (\text{nach (d)}) \\ &= (-\alpha)\cdot\det^{-\alpha-1}\cdot(tr(X)\cdot\det)\cdot w_i + \det^{-\alpha}\cdot D(w_i) && (\text{nach Wahl von X}) \\ &= (-\alpha)\cdot\det^{-\alpha}\cdot tr(X)\cdot w_i + \det^{-\alpha}\cdot c_i\cdot w_i && (\text{nach Wahl der } w_i) \\ &= ((-\alpha)\cdot tr(X)+c_i)\cdot\det^{-\alpha}\cdot w_i. \end{aligned}$$

Die Erzeuger $\det^{-\alpha}\cdot w_i$ des Unterraums von (1) sind Eigenvektoren von D, d.h. D operiert auf diesem Raum halbeinfach.

2. <u>Fall</u>. D operiert auf $S_k(\check{E})$ lokal nilpotent.

Wir haben zu zeigen, D operiert lokal nilpotent auf $k[\mathbf{GL}(V)]$. Da die Operation von D auf $k[\mathbf{GL}(V)]$ lokal endlich ist (nach 4.4.19B(iv)), reicht es zu zeigen, für jedes Element

$$\det^{-\alpha}\cdot f \in k[\mathbf{GL}(V)] \text{ mit } f \in S_k(\check{E})$$

gibt es eine natürliche Zahl s mit

$$D^s(\det^{-\alpha}\cdot f) = 0.$$

Sei $X \in T_eGL(V)$ der Tangentialvektor mit $D = *X$. Dann gilt nach (d)

$$\det*X = tr(X)\cdot\det$$

also

$$D(\det) = \det * X = tr(X)\bullet\det$$

also für jede natürliche Zahl s

$$D^s(\det) = tr(X)^s\bullet\det$$

Wegen $\det \in S_k(\check{V})$ und weil D auf $S_k(\check{V})$ lokal nilpotent auf $S_k(\check{V})$ operiert, gibt es ein s mit $tr(X)^s = 0$. Wegen $tr(X) \in k$ folgt

$$tr(X) = 0,$$

also

$$D(\det) = 0,$$

also

$$\begin{aligned} 0 &= D(1) \\ &= D(\det^\alpha\bullet\det^{-\alpha}) \\ &= D(\det^\alpha)\bullet \det^{-\alpha} + \det^\alpha\bullet D(\det^{-\alpha}) \\ &= \alpha\bullet\det^{\alpha-1}\bullet D(\det)\bullet \det^{-\alpha} + \det^\alpha\bullet D(\det^{-\alpha}) \\ &= \det^\alpha\bullet D(\det^{-\alpha}). \end{aligned}$$

Weil k[**GL**(V)] nullteilerfrei ist, folgt

$$D(\det^{-\alpha}) = 0.$$

Wir erhalten

$$D(\det^{-\alpha}\bullet f) = \det^{-\alpha}\bullet D(f)$$

(für jedes $f \in S_k(\check{E})$), also

$$D^s(\det^{-\alpha}\bullet f) = \det^{-\alpha}\bullet D^s(f).$$

Weil D lokal nilpotent auf $S_k(\check{V})$ operiert, gibt es ein s mit $D^s(f) = 0$. Für dieses s ist aber auch

$$D^s(\det^{-\alpha}\bullet f) = 0.$$

4. <u>Schritt</u>. Vergleich der Operationen von X auf V und von $*X$ auf $End_k(V)$

Seien $E = End_k(V)$ wie im zweiten Schritt und

$$X \in T_e GL(V) = \mathbf{gl}(V).$$

Dann ist die Einschränkung der Operation von $*X \in L(G)$ auf

$$S_k(\check{E}) \subseteq k[GL(V)]$$

gerade die k-Derivation

$$s(\tilde{X}):S_k(\check{E}) \longrightarrow S_k(\check{E})$$

des zweiten Schritts (mit $\check{E}$ anstelle von E) zum Dual

$$\tilde{X}: \check{E} \longrightarrow \check{E}$$

der linearen Abbildung

$$E \longrightarrow E,\ x \mapsto x\circ X.$$

Insbesondere ist $*X$ genau dann halbeinfach (bzw. lokal nilpotent) wenn X halbeinfach (bzw. nilpotent) ist.

Wir wenden $*X$ auf das Element

$$x_1\bullet\ldots\bullet x_r \in S_k(\check{E})$$

mit $x_1, \ldots, x_r \in \check{E}$ an. Weil $*X$ eine Derivation ist, erhalten wir

$$*X(x_1\bullet\ldots\bullet x_r) = \sum_{i=1}^{r} x_1\bullet\ldots\bullet x_{i-1}\bullet *X(x_i)\bullet x_{i+1}\bullet\ldots\bullet x_r$$

Damit ist die Einschränkung von $*X$ auf $S_k(\check{E})$ gerade die k-Derivation von

$$Der_k(S_k(\check{E}), S_k(\check{E})),$$

welche durch die k-lineare Abbildung

$$*X|_{\check{E}}: \check{E} \longrightarrow S_k(\check{E}).$$

induziert wird. Zum Beweis des ersten Teils der Aussage des dieses Schritts müssen wir zeigen, diese Abbildung hat ihre Werte in $\check{E}$ und für $\ell\in\check{E}$, $x\in E$ gilt

$$*X|_{\check{E}}(\ell)(x) = \widetilde{X}(\ell)(x) = \ell(x\circ X). \tag{2}$$

Jedes $\ell \in \check{E}$ ist eine k-Linearkombination der T_{ij}, und wir können ℓ als ein Funktion der Matrix T mit den Einträgen T_{ij} betrachten. Mit $x \in E = End_k(V)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
*X\,|_{\check{E}}(\ell)(x) &= *X(\ell))(x)\\
&= (\ell*X)(x)\\
&= X(\lambda_{x^{-1}}(\ell(T)))\\
&= X(\ell(xT))
\end{aligned}$$

Speziell für $\ell = T_{ij}$ ist

$$\begin{aligned}
*X\,|_{\check{E}}(T_{ij})(x) &= X(\sum_{\alpha=1}^{n} x_{i\alpha}T_{\alpha j}))\\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} x_{i\alpha}X(T_{\alpha j})
\end{aligned}$$

Wir identifizieren $X \in T_e\mathbf{GL}(V) = \mathbf{gl}(V)$ mit der Matrix mit den Einträgen $X(T_{ij})$ und erhalten

$$\begin{aligned}
*X\,|_{\check{E}}(T_{ij})(x) &= \sum_{\alpha=1}^{n} x_{i\alpha}X_{\alpha j}\\
&= T_{ij}(x\bullet X).
\end{aligned}$$

also

$$*X\,|_{\check{E}}(\ell)(x) = \ell(x\bullet X)$$

für jedes $x \in E = End_k(V)$ und jedes $\ell \in \check{E}$ (da beide Seiten k-linear bezüglich ℓ sind). Damit ist (2) bewiesen. Man beachte, die rechte Seite ist eine k-lineare Funktion in x, d.h. es gilt

$$*X\,|_{\check{E}}(\ell) \in \check{E}$$

für jedes $\ell \in \check{E}$ also

$$*X\,|_{\check{E}}(\check{E}) \in \check{E}$$

Der erste Teil der Aussage des vierten Schritts ist damit bewiesen.

Nach dem dritten Schritt, Aussage (c), ist die Operation von $*X$ auf $k[\mathbf{GL}(V)]$ genau dann halbeinfach (bzw. lokal nilpotent), wenn sie auf $S_k(\check{E})$ halbeinfach (bzw. nilpotent) ist. Nach dem zweiten Schritt ist die Halbeinfachheit (bzw. die lokale Nilpotenz) von $*X$ auf $k[\mathbf{GL}(V)]$ äquivalent zur Halbeinfachheit (bzw. Nilpotenz) der Abbildung

$$\widetilde{X}: \check{E} \longrightarrow \check{E},\ \ell \mapsto (x \mapsto \ell(x\bullet X)).$$

und nach dem ersten Schritt zur Halbeinfachheit (bzw. Nilpotenz) von

$$X : V \longrightarrow V.$$

5. Schritt. Abschluß des Beweises.

Die einzige verbleibende Aussage ist Ausssage (iii). Seien $X \in T_e\mathbf{GL}(V) = \mathbf{gl}(V)$ der Tangentialvektor mit

$$D = *X$$

und

$$X = X_s + X_n$$

die Jordan-Zerlegung von X in **gl**(V). Nach Definition der Faltung gilt dann

$$D = *X = *X_s + *X_n. \tag{3}$$

Nach (i) und (ii) ist $*X_s$ halbeinfach und $*X_n$ lokal nilpotent in $\mathrm{End}_k(k[\mathbf{GL}(V)])$.
Außerdem gilt

$$\begin{aligned}[*X_s, *X_n] &= *[X_s, X_n] && \text{(nach 4.4.19B)}\\ &= *0 && (X_s \text{ und } X_n \text{ kommutieren})\\ &= 0 && (*X \text{ ist k-linear bezüglich X})\end{aligned}$$

Damit ist (3) die Joran-Zerlung von D, d.h. es gilt

$$D_s = *X_s \in L(\mathbf{GL}(V))$$

und

$$D_n = *X_n \in L(\mathbf{GL}(V))$$

QED.

4.4.19D Die Jordan-Zerlegung in L(G)

Seien G eine lineare algebraische Gruppe und

$$D \in L(G)\ (\subseteq D_G := \mathrm{Der}_k(k[G], k[G]) \subseteq \mathrm{End}_k(k[G])\ ).$$

Dann ist D als Element von $\mathrm{End}_k(k[G])$ lokal endlich, besitzt also eine additve Jordan-Zerlegung

$$D = D_s + D_n \tag{1}$$

(vgl. Bemerkung 2.4.7(iii)). In dieser Situation gilt

$$D_s, D_n \in L(G).$$

Die Zerlegung (1) heißt Jordan-Zerlegung von D in L(G).

Beweis. 1. Schritt. Reduktion auf den Fall, daß G eine abgeschlossene Untergruppe einer GL_n ist.

Nach 2.3.7(i) ist G isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe

$$H \hookrightarrow \mathbf{GL}_n$$

einer allgemeinen linearen Gruppe $\mathbf{GL}_n$. Seien

$$\varphi: G \xrightarrow{\cong} H$$

ein entsprechender Isomorphismus. Der zugehörige k-Algebra-Isomorphismus

$$\varphi^*: k[H] \xrightarrow{\cong} k[G]$$

der Koordinatenring führt zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{End}_k(k[H]) & \underset{\cong}{\xrightarrow{\sigma_{\varphi^*}}} & \mathrm{End}_k(k[G]) & D & f \mapsto \varphi^*\circ f\circ\varphi^{*-1} & \varphi^*\circ D\circ\varphi^{*-1} \\
\uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
L(H) & \underset{\cong}{\longrightarrow} & L(G) & D & \mapsto & \varphi^*\circ D\circ\varphi^{*-1}
\end{array}$$

von Lie-Algebra-Isomorphismen[49]. Weil φ^* insbesondere k-linear ist, erhalten wir aus (1) die Jordan-Zerlegung

$$\sigma^{-1}_{\varphi^*}(D) = \sigma^{-1}_{\varphi^*}(D_s) + \sigma^{-1}_{\varphi^*}(D_n)$$

von $\sigma^{-1}_{\varphi^*}(D)$ in $\mathrm{End}_k(k[H])$. Weil σ_{φ^*} einen Isomorphismus $L(H) \xrightarrow{\cong} L(G)$ induziert, reicht es zu zeigen, die beiden Summanden auf der rechten Seite liegen in L(H).

2. Schritt. Der Fall, daß G eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$ ist.

Die natürliche Einbettung i: $G \hookrightarrow \mathbf{GL}_n$ induziert einen surjektiven k-Algebra-Homomorphismus

$$\rho: k[\mathbf{GL}_n] \twoheadrightarrow k[G],\ f \mapsto f|_G, \tag{2}$$

der insbesondere k-linear ist. Nach Bemerkun 2.4.7(v) erhalten wir aus der Jordan-Zerlegung

$$a = a_s + a_n$$

eines lokal endlichen k-linearen Endomorphismus

$$a: k[\mathbf{GL}_n] \longrightarrow k[\mathbf{GL}_n] \text{ mit } a(\mathrm{Ker}\,\rho) \subseteq \mathrm{Ker}\,\rho$$

durch Übergang zu den Restklassen modulo Ker ρ die Jordan-Zerlegung der induzierten Abbildungen, d.h. mit

$$\bar{a}(f|_G) := a(f)|_G$$
$$\bar{a}_s(f|_G) := a_s(f)|_G$$
$$\bar{a}_n(f|_G) := a_n(f)|_G$$

---

[49] Für D', D'' ∈ L(G) gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi^*}([D', D'']) &= \varphi^*\circ[D', D'']\circ\varphi^{*-1} && \text{(nach Definition von } \sigma_{\varphi^*}) \\
&= \varphi^*\circ D'\circ D''\circ\varphi^{*-1} - \varphi^*\circ D''\circ D'\circ\varphi^{*-1} && \text{(vgl. Bem. 4.4.3I(i) und 4.4.3D)} \\
&= \varphi^*\circ D'\circ\varphi^{*-1}\circ\varphi^*\circ D''\circ\varphi^{*-1} - \varphi^*\circ D''\circ\varphi^{*-1}\circ\varphi^*\circ D'\circ\varphi^{*-1} \\
&= [\varphi^*\circ D'\circ\varphi^{*-1}, \varphi^*\circ D''\circ\varphi^{*-1}] \\
&= [\sigma_{\varphi^*}(D'), \sigma_{\varphi^*}(D'')]
\end{aligned}$$

ist

$$\overline{a} = \overline{a}_s + \overline{a}_n$$

die Jordan-Zerlegung von $\overline{a}$ in $End_k(k[G])$. Ist speziell

$$a \in \mathcal{D}_{\mathbf{GL}_n,G} \cap L(\mathbf{GL}_n) \; (\subseteq Der_k(k[\mathbf{GL}_n], \mathbf{GL}_n) \subseteq End_k(\mathbf{GL}_n)$$

das Urbild von

$$D \in L(G)$$

beim Isomorphismus

$$\phi: \mathcal{D}_{\mathbf{GL}_n,G} \cap L(\mathbf{GL}_n) \xrightarrow{\cong} L(G)$$

von 4.4.7C, d.h.

$$D(f|_G) = a(f)|_G$$

für jedes $f \in k[\mathbf{GL}_n]$, so gilt

$$D_s = \overline{a}_s \text{ und } D_n = \overline{a}_n.$$

Man beachte, das so gewählte a ist tatsächlich lokal endlich (wegen $a \in L(\mathbf{GL}_n)$ und 4.4.19D) und überführt den Kern von ρ in sich (wegen $a \in \mathcal{D}_{\mathbf{GL}_n,G}$ und der Definition von $\mathcal{D}_{\mathbf{GL}_n,G}$). Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$a_s,\ a_n \in \mathcal{D}_{\mathbf{GL}_n,G} \cap L(\mathbf{GL}_n), \tag{3}$$

denn dann gilt nach Definition von φ,

$$D_s = \overline{a}_s = \phi(a_s) \in L(G)$$

und

$$D_n = \overline{a}_n = \phi(a_n) \in L(G).$$

Beweisen wir also (3). Wegen

$$a \in L(\mathbf{GL}_n)$$

gilt

$$a_s,\ a_n \in L(\mathbf{GL}_n) \; (\subseteq Der_k(k[\mathbf{GL}_n], \mathbf{GL}_n)) \tag{4}$$

(nach 4.4.19D). Wegen

$$a \in \mathcal{D}_{\mathbf{GL}_n,G}$$

gilt

$$a(Ker\ \rho) \subseteq Ker\ \rho$$

(nach Definition von $\mathcal{D}_{\mathbf{GL}_n,G}$ in 4.4.7C), also

$$a_s(Ker\ \rho) \subseteq Ker\ \rho \text{ und } a_n\ (Ker\ \rho) \subseteq Ker\ \rho$$

(nach Bemerkung 2.4.7(v)), also

$$a_s,\ a_n \in \mathcal{D}_{\mathbf{GL}_n,G} \tag{5}$$

(nach Definition von $\mathcal{D}_{\mathbf{GL}_n,G}$ in 4.4.7C und (4)). Mit (4) und (5) gilt aber (3) und damit die Behauptung.
QED.

4.4.19E Verträglichkeit mit abgeschlossenen Untergruppen
Seien G eine lineare algebraische Gruppe,

$$f: G \longrightarrow \mathbf{GL}_n$$

ein Isomorphismus mit einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$. und

$$\phi: \mathcal{D}_{\mathbf{GL}_n,G} \cap L(\mathbf{GL}_n) \xrightarrow{\cong} L(G)$$

der Isomoprhismus von 4.4.7C (genauer: die Zusammensetzung des Isomorphismus

$$\phi: \mathcal{D}_{\mathbf{GL}_n,H} \cap L(\mathbf{GL}_n) \xrightarrow{\cong} L(H)$$

von 4.4.7C mit dem im ersten Schritt des Beweises von 4.4.19D betrachteten Isomorphismus $L(H) \xrightarrow{\cong} L(G)$). Dann gilt

$$\phi(X_s) = \phi(X)_s \text{ und } \phi(X_n) = \phi(X)_n$$

für jedes $X \in \mathcal{D}_{\mathbf{GL}_n,H} \cap L(\mathbf{GL}_n)$.

Beweis. Dies eine direkte Folgerung aus dem Beweis der vorangehenden Aussage 4.4.19D.
QED.

4.4.20 Satz[50] 76

Sei G eine lineare algebraische Gruppe und $X \in L(G)$. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) X_s und X_n liegen in L(G) und es gilt $[X_s, X_n] = 0$.

(ii) Für jeden Homomorphismus $\phi: G \longrightarrow G'$ von linearen algebraischen Gruppen gilt

$$(d\phi)(X_s) = ((d\phi)(X))_s \text{ und } (d\phi)(X_n) = ((d\phi)(X))_n.$$

(iii) Ist $G = \mathbf{GL}_n$ so ist X_s (bzw. X_n) der halbeinfache (bzw. nilpotente) Teil der Matrix $X \in \mathbf{M}_n$ (vgl. 4.4.10 Beispiel 3).

Beweis. Zu (i). Der erste Teil der Aussage,

$$X_s, X_n \in L(G),$$

gilt nach 4.4.19D. Weil X_s und X_n als Abbildunge $k[G] \longrightarrow k[G]$ kommutieren, gilt außerdem

$$[X_s, X_n] = X_s \circ X_n - X_n \circ X_s = 0.$$

Zu (iii). Seien

[50] Im Original findet sich die Bemerkung, daß die Aussage des Satzes so ähnlich wie der Satz 2.4.8 bewiesen wird, wobei sich die Aussagen von 4.4.19 im Original auf 6 Zeilen reduzieren. Das scheint mir ziemlich viel Verzicht auf Details zu sein.

$$D \in L(\mathbf{GL}_n)$$

und $X \in T_e\mathbf{GL}_n = \mathbf{gl}(V)$ mit $V = k^n$ der Tangentialvektor mit

$$D = *X.$$

Dann gilt nach 4.4.19C:

$D = *X \in \mathrm{End}_k(k[\mathbf{GL}(V)])$ ist halbeinfach (bzw. nilpotent)

$\Leftrightarrow$

$X \in \mathbf{gl}(V)$ ist halbeinfach (bzw. nilpotent).

Bei der Identifikation

$$L(\mathbf{GL}_n) \underset{\cong}{\xrightarrow{\alpha_G}} T_e\,\mathbf{GL}_n \underset{\cong}{\xrightarrow{di}} \mathbf{gl}_n = \mathbf{M}_n$$

der Lie-Algebra von $\mathbf{GL}_n$ mit den n×n-Matrizen $\mathbf{M}_n$ wird $D \in L(\mathbf{GL}_n)$ abgebilden in

$$\begin{aligned} di(\alpha_G(D)) &= di(\alpha_G(*X)) \\ &= di(X) && \text{(die Faltung ist invers zu } \alpha_G\text{, vgl. 4.4.19B(ii))} \\ &= (X(T_{ij}))_{i,j=1,\dots,n} && \text{(vgl. 4.4.10 Beispiel 3,(iii))} \\ &= (X_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \\ &= X, \end{aligned}$$

Damit ist D genau dann halbeinfach (bzw. nilpotent) also Element von End_k $(k[\mathbf{GL}(V)])$, wenn D also Matrix halbeinfach (bzw. nilpotent) ist, und die Jordan-Zerlegung

$$\begin{aligned} D &= D_s + D_n \\ &= *X_s + *X_n \quad \text{(vgl. 4.4.19C L(iii))} \end{aligned}$$

von D bekommt bei der Identifikation von $L(\mathbf{GL}_n)$ mit $\mathbf{M}_n$ die Gestalt

$$X = X_s + X_n$$

<u>Zu (ii)</u>. Das Bild $\phi(G)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von G' (nach 2.2.5L(ii)). Damit ist ϕ die Zusammensetzung der beiden Homomorphismen linearer algbraischer Gruppen

$$G \twoheadrightarrow \phi(G) \text{ und } \phi(G) \hookrightarrow G'.$$

Es reicht also, die Aussge fü die beiden folgenden Spezialfälle zu beweisen.

1. <u>Fall</u>: ϕ: $G \hookrightarrow G'$ ist eine abgeschlossene Einbettung.

Wir können annehmen, G ist eine abgeschlossene Untergruppe von G' und G' eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$.

Die Jordan-Zerlegung von

$$X \in L(G)$$

stimmt dann nach (iii) mit der gewöhnlichen Jordan-Zerlegung von Matrizen von $\mathbf{M}_n$ überein. Dasselbe gilt aber auch, wenn man X als Element von L(G') auffaßt, d.h. die Jordan-Zerlegung

$$X = X_s + X_n$$

in L(G) geht beim Anwenden von $d\phi$ in die Jordan-Zerlegung

$$X = X_s + X_n$$

in L(G') über.

2. <u>Fall</u> $\phi: G \twoheadrightarrow G'$ ist surjektiv.
Der induzierte k-Algebra-Homomorphismus

$$\phi^*: k[G'] \hookrightarrow k[G]$$

ist injektiv. Wir können k[G'] als k-Teilalgebra von k[G] betrachten. Auf Grund des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \hookrightarrow Der_k(k[G],k[G]) \xrightarrow{\alpha'_G} & T_eG \\ L(\phi)\downarrow & & \downarrow(d\phi)_e \\ L(G') & \hookrightarrow Der(k[G'],k[G']) \xrightarrow{\alpha'_{G'}} & T_{e'}G' \end{array}$$

(vgl. 4.4.8(i) und 4.4.8(ii)) gilt für $X \in L(G)$

$$(d\phi)_e(\alpha_G(X)) = \alpha_{G'}(L(\phi)(X)) \in T_{e'}G',$$

also für $f' \in k[G']$ ($\subseteq k[G]$),

$$(d\phi)_e(\alpha_G(X))(f) = \alpha_{G'}(L(\phi)(X))(f'),$$

d.h.

$$\alpha_G(X)(\phi^*(f)) = (L(\phi)(X))(f')(e'),$$

d.h.

$$X(\phi^*(f'))(e) = (L(\phi)(X))(f')(e') = (L(\phi)(X))(f')(\phi(e)). \qquad (1)$$

Die regulären Funktionen

$$X(\phi^*(f'))\ ,\ ((L(\phi)(X))(f'))\circ\phi \in k[G]$$

haben an der Stelle e denselben Wert.
Seien $g \in G$, $g' := \phi(g)$ und $f'' := \lambda_{g'^{-1}}f'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} X(\phi^*(f''))(e) &= X(\phi^*(\lambda_{g'^{-1}}f'))(e) \\ &= X((\lambda_{g'^{-1}}f')\circ\phi)(e) \\ &= X(f'(g'\bullet ?)\circ\phi)(e) \\ &= X(f'(\phi(g)\bullet\phi(?))(e) \\ &= X(f'(\phi(g\bullet ?))(e) \qquad (\phi \text{ ist Gruppen-Homomorphismus}) \\ &= X(\lambda_{g^{-1}}(f'\circ\phi))(e) \\ &= \lambda_{g^{-1}}(X(f'\circ\phi))(e) \qquad (X \text{ ist linksinvariant}) \\ &= X(f'\circ\phi))(g\bullet e) \\ &= X(f'\circ\phi))(g) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (L(\phi)(X))(f'')(e') &= (L(\phi)(X))(\lambda_{g'^{-1}}f')(e') \\ &= \lambda_{g'^{-1}}(L(\phi)(X))(f')(e') \ (L(\phi)(X) \text{ ist linksinvariant}) \\ &= (L(\phi)(X))(f')(g'\bullet e') \\ &= (L(\phi)(X))(f')(g') \\ &= (L(\phi)(X))(f')(\phi(g)) \end{aligned}$$

Aus (1) mit f'' anstelle von f' erhalten wir damit

$$X(f'\circ\phi))(g) = (L(\phi)(X))(f')(\phi(g))$$

für jedes $g \in G$, also

$$X(f'\circ\phi)) = (L(\phi)(X))(f')\circ\phi,$$

also

$$X(\phi^*(f')) = \phi^*((L(\phi)(X))(f')),$$

also

$$X\circ\phi^* = \phi^*\circ(L(\phi)(X)).$$

Wir haben gezeigt, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[G'] & \overset{\phi^*}{\hookrightarrow} & k[G] \\ L(\phi)(X)\downarrow & & \downarrow X \\ k[G'] & \overset{\phi^*}{\hookrightarrow} & k[G'] \end{array} \qquad (2)$$

Nach Bemerkung 2.4.7 (v) erhält man durch Einschränken der Jordan-Zerlegung von X auf k[G'] die Jordan-Zerlegung von $L(\phi)(X)$, d.h. die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} k[G'] & \overset{\phi^*}{\hookrightarrow} & k[G] \\ (L(\phi)(X))_s\downarrow & & \downarrow X_s \\ k[G'] & \overset{\phi^*}{\hookrightarrow} & k[G'] \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} k[G'] & \overset{\phi^*}{\hookrightarrow} & k[G] \\ (L(\phi)(X))_n\downarrow & & \downarrow X_n \\ k[G'] & \overset{\phi^*}{\hookrightarrow} & k[G'] \end{array}$$

sind kommutativ. Weil das Diagramm (2) für jedes $X \in L(G)$ kommutativ ist (also auch für X_s und X_n, anstelle von X), folgt

$$(L(\phi)(X))_s = L(\phi)(X_s) \text{ und } (L(\phi)(X))_n = L(\phi)(X_n),$$

wie behauptet.[51]

QED.

4.4.21 Aufgaben 77

4.4.21 Aufgabe 1 ***77***

(i) Ist G ein Torus, so sind alle Elemente von L(G) halbeinfach.

(ii) Ist G unipotent, so sind alle Elemente von L(G) nilpotent.

Beweis.

QED.

4.4.21 Aufgabe 2 ***77***

Sei G eine lineare algebraische Gruppe über einem Körper k der Charakteristik $p > 0$. Dann gilt für jedes $X \in L(G)$

$$(X_s)^{[p]} = (X^{[p]})_s \text{ und } (X_n)^{[p]} = (X^{[p]})_n.$$

Beweis.

QED.

---

[51] Wir haben im Beweis die Bezeichnung $L(\phi)$ anstelle von $d\phi$ benutzt (da letztere Bezeichnung nicht ganz eindeutig ist).

4.5 Anmerkungen zum vierten Kapitel 77

Die Abschnitte 4.1 und 4.3 enthalten Standart-Material zu den Tangentialräumen und zu nicht-singulären Punkten algebraischer Varietäten. Die grundlegenden Ergebnisse sind 4.3.3 und 4.3.4.
Unsere Vorgehensweise verwendet Moduln und Differentiale. Die Beschreibung von deren formalen Eigenschaften in 4.2 ist kurz gehalten. Eine ausführlichere Untersuchung findet man in Grothendieck & Dieudonné [1], Kapitel 0, §20 oder in Matsumura [1], Kapitel 10. Wir haben auch die von uns benötigten algebraischen Ergebnisse zu den separabel erzeugten Körpererweiteungen behandelt.
Bei der Untersuchung der Lie-Algebra einer linearen algebraischen Gruppe G und deren Eigenschaften verwenden wir ebenfalls Differentiale. Die grundlegenden Eigenschaften der Lie-Algebra von G (wie etwa 4.4.5) werden mit Hilfe der in 4.4.2 angegebenen Eigenschaften des Differentialmoduls Ω_G bewiesen.
Ein anderer Zugang zu den Lie-Algebren verwendet die Beschreibung der Tangentialräume mit Hilfe der Dualzahlen (vgl. 4.1.9 Aufgabe 3). Dies ist die Vorgehensweise, welcher Borel [3] folgt.
Der Satz von Lang, der grundlegend ist für die Untersuchung der "endlichen Gruppen vom Lie-Typ", wurde zuerst in Lang [1] bewiesen mit dem Blick auf Anwendungen auf die abelschen Varietäten über endlichen Körpern.

Index

Inhalt